

I Projections et bases orthonormales

Exercice 1 [Solution]

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , canoniquement euclidien, de la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit \mathbb{R}^4 euclidien, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

1. Trouver une base orthonormale de H engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$.
2. Donner la matrice dans B de la projection orthogonale sur H .
3. Calculer $d(e_1, H)$.

Exercice 3 [Solution]

Dans \mathbb{R}^3 euclidien, former la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$, où $n = (a, b, c)$ est supposé unitaire.

Exercice 4 (CPP PSI 2017) [Solution]

Dans \mathbb{R}^3 canoniquement euclidien, écrire la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2018) [Solution]

u et v étant deux vecteurs distincts et non nuls de E , espace euclidien, on note H l'hyperplan normal à $u - v$ et r_H la réflexion par rapport à H (symétrie orthogonale par rapport à H).

1. Montrer que s'il existe une réflexion r telle que $r(u) = v$ alors $\|u\| = \|v\|$
2. Démontrer la réciproque.
indication : vérifier que si $\|u\| = \|v\|$ alors $u + v \perp u - v$.
3. Application : on se place dans \mathbb{R}^4 canoniquement euclidien avec $u = (1, -1, 1, 0)$ et $v = (0, -1, 1, 1)$; écrire la matrice dans la base canonique de la réflexion qui échange u et v .

Exercice 6 (Centrale PSI 2021) [Solution]

Soit $\phi(x) = e^{-x^2}$

1. Montrer que ϕ est C^∞ sur \mathbb{R} et qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi^{(n)} = P_n \times \phi$.
Quel est le degré de P_n ?
2. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\phi(t) dt$
indication : IPP sur $(P_n|P_m)$ si $n < m$
3. Montrer que P_n est scindé à racines simples.
indication : vérifier que $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, en supposant que P_n possède au plus $n - 1$ racines, considérer $(P_n|Q)$ avec Q qui change de signe en même temps que P_n .

Exercice 7 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer sa valeur
2. Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
3. On pose $L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$
4. Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale.
indication : calculer $(L_i|L_j)$ avec $i \leq j$ par IPP
5. Montrer que L_n est scindé à racines simples dans \mathbb{R}^+ .
indication : introduire les points où L_n change de signe sur \mathbb{R}^+ et raisonner par l'absurde en introduisant un polynôme simple qui change de signe en même temps que L_n sur \mathbb{R}^+ .

II Produits scalaires

Exercice 8 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Montrer que $(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 9 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

1. Montrer que $(f|g) = f(0)g(0) + \int_{-1}^1 f'(t)g'(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit E l'espace des suites réelles de période 4

1. Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une base.
indication : utiliser $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3)$ pour trouver la dimension de E
2. Montrer que $\phi : (u, v) \in E^2 \mapsto \sum_{k=1}^4 (ku_k - u_{k+1})(kv_k - v_{k+1})$ est un produit scalaire sur E .
3. En donner une base orthonormale
indication : poser $x_k = ku_k - u_{k+1}$ et $y_k = kv_k - v_{k+1}$ et commencer par « deviner » ce qui conviendrait pour x_k et y_k si $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^3 \frac{X - k}{i - k}$, pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

1. Calculer, pour $0 \leq i, j \leq 3$, $L_i(j)$ et en déduire que $(L_i)_{i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ est une base de E .
2. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^3 (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$ définit un produit scalaire sur E
3. Déterminer une base orthonormale de E .

Exercice 12 (Mines-Ponts PC 2011) [Solution]

$B(X, Y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i y_j}{i + j}$ est-il un produit scalaire sur \mathbb{R}^n ?

indication : remarquer que $\frac{1}{i + j} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} t dt$.

Exercice 13 (Mines-Ponts MP 2014) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} P(e^{-it})Q(e^{it}) dt \right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la base canonique est orthonormée.
2. Montrer que $\|P\| \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|$ puis qu'il existe un unique P de norme 1 et de degré n tel que $\sup_{|z|=1} |P(z)| = 1$.
3. Soit P de degré n tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. Montrer que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Exercice 14 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonale et telle que P_n soit de degré n et de coefficient dominant 1.
3. Montrer que P_n est de la même parité que n .
4. Montrer que P_n est scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 15 (TPE-EIVP PSI 2019) [Solution]

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Montrer que $\int_a^b (f(u) - f(a))^2 du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(u)^2 du$; on pourra majorer $(f(x) - f(a))^2$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Étudier le cas d'égalité.

indication : $f(u) - f(a) = \int_a^u f'(t) dt$

Exercice 16 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ positive1. Montrer $\left(\int_0^1 f(t)^3 dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t) dt\right) \left(\int_0^1 f(t)^5 dt\right)$ et caractériser l'égalité.2. On suppose de plus $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $f(0) = 0$ et $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$.Montrer $\int_0^1 f(t)^3 dt \leq \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2$.*indication : vérifier $f(x) \in [0, 1]$.*

III Orthogonalité

Exercice 17 (Mines-Ponts PC 2013) [Solution]Soient $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$.1. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$ est un produit scalaire sur E .2. V et W sont-ils orthogonaux? Supplémentaires orthogonaux?**Exercice 18 (CCINP PSI 2019) [Solution]**1. Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t) dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.2. On pose $F = \{u \in E, \forall x \in [0, 1], u(x) = 0\}$ et $G = \{u \in E, \forall x \in [-1, 0], u(x) = 0\}$. Montrer que $F \perp G$. F et G sont-ils supplémentaires?3. Justifier $G \subset F^\perp$.4. On veut montrer que $G = F^\perp$: pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ g(0) & \text{si } x \in [-1, -1/n] \\ \text{affine} & \text{sur } [-1/n, 0] \end{cases}$; calculer $\langle f_n, g \rangle$ et montrer que $g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0$.Conclure en utilisant f nulle sur $[0, 1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$.

IV Études d'endomorphismes

Exercice 19 (CCINP PSI 2022) [Solution]Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f canoniquement associé ; on munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique.1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$ 2. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(A)$. Qu'en déduit-on?3. Montrer que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Que peut-on en déduire sur $\dim(\text{Im}(f))$?4. On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. f est-il diagonalisable?**Exercice 20 (CCINP PSI 2018) [Solution]**Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E euclidien, tel que $\forall (x, y) \in E^2, x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$.1. Montrer que l'image des vecteurs d'une base orthonormée de E sont toutes de même norme (on la note μ).2. Montrer que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \mu\|x\|$.**Exercice 21 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]**Soient E un espace euclidien, $u, v \in E$ linéairement indépendants et $\varphi : x \in E \mapsto (v|x)u - (u|x)v$ 1. Montrer que $F = \text{Vect}\{u, v\}$ et son orthogonal sont supplémentaires2. Écrire la matrice de φ dans une base adaptée à cette décomposition3. φ est-il diagonalisable?**Exercice 22 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]**Soit u un endomorphisme de E , espace euclidien, tel que $\ker(u) = \text{Im}(u)$ et $\exists v \in \mathcal{L}(E), \forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|v(y))$.1. Montrer que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v)$.*indication : prouver $\text{Im}(v) = (\ker(u))^\perp$.*2. En déduire que $u + v$ est inversible.

V Projecteurs orthogonaux théoriques

Exercice 23 (Mines-Ponts MP 2013) [Solution]

Soit p un projecteur non nul de E , euclidien.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
indication : calculer $\langle x + ty | p(x + ty) \rangle$ avec $t \in \mathbb{R}, x \in \ker(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$.
2. En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée bornée de $\mathcal{L}(E)$. (À faire après le cours sur les evn)

Exercice 24 [Solution]

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \dots, u_{n+2}) \in E^{n+2}$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ tel que $\langle x_i | x_j \rangle \geq 0$.

indication : considérer les projetés orthogonaux des x_i sur $\{x_{n+2}\}^\perp$.

Exercice 25 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]

Soient A et B deux sous espaces orthogonaux d'un espace euclidien, $C = (A + B)^\perp$. Soient s_A la symétrie orthogonale par rapport à A , s_B la symétrie orthogonale par rapport à B et s_C la symétrie orthogonale par rapport à C . Montrer que $s_A \circ s_B = s_B \circ s_A = s_C$.

Exercice 26 (CCINP PSI 2022) [Solution]

1. Montrer que $\langle X | Y \rangle = X^T Y$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .
2. Montrer que $(\text{Im } A)^\perp = \ker(A^T)$
3. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(X) = \|AX - Y\|$ avec $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que $f(X_0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$ si et seulement si $A^T(AX_0 - Y) = 0$ et l'existence d'un tel X_0 .

VI Familles de vecteurs

Exercice 27 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec les cas d'égalité) dans un espace euclidien.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire
3. Résoudre dans \mathbb{R}^n le système
$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

Exercice 28 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs d'un espace euclidien E , muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On note G la matrice de coefficients $(u_i | u_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$) et M la matrice des vecteurs u_i dans la base \mathcal{B} .

1. Exprimer G en fonction de M et montrer que $\det(G) \geq 0$ avec égalité si et seulement si les vecteurs u_i sont liés.
2. Généraliser à une famille de p vecteurs, $p < n$.

Exercice 29 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs unitaires de E , euclidien de dimension $n < p$, tels qu'il existe une constante $d > 0$ vérifiant $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| = d$. Exprimer d en fonction de p et en déduire que $p = n + 1$. On pourra utiliser la matrice de coefficient $(x_i | x_j)$ et vérifier qu'elle n'est pas inversible si (x_1, \dots, x_p) est liée.

Exercice 30 (ENSEA-ENSIIE MP 2014) [Solution]

Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de E , espace euclidien de dimension n , telle que si $i \neq j, (u_i | u_j) = -1$.

1. Montrer que $\langle (u, x) | (v, y) \rangle = (u | v) + xy$ est un produit scalaire sur $E \times \mathbb{R}$.
2. Que dire de la famille $((u_i, 1))_{1 \leq i \leq p}$? Que peut-on en déduire sur n et p ?

Exercice 31 (CCP PSI 2010) [Solution]

Soit E préhilbertien réel tel qu'il existe une famille de vecteurs unitaires (e_1, \dots, e_n) vérifiant $\forall x \in E, \sum_{j=1}^n (e_j | x)^2 = \|x\|^2$.

Montrer que cette famille est orthonormale et en déduire que E est de dimension finie que l'on précisera.

indication : pour la dimension, considérer $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}^\perp$.

Exercice 32 (CCP PSI 2009) [Solution]

Soit E un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

indication : commencer par montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \left(\sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \middle| y \right) = (x | y)$

Exercice 33 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E , espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x>)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leq i \leq n, \|e_i\| \leq 1$.
2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
indication : Cauchy-Schwarz
3. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

Exercice 34 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de E , euclidien de dimension n , telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x>)^2$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

VII Distances et projections orthogonales

Exercice 35 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at + b)^2 dt$.

Exercice 36 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 P(t) dt \right)^2 = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt$.
3. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est orthogonale avec $P_0 = 1, P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ puis donner $\text{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ puis $I = \inf \left\{ \int_{-1}^1 P(t)^2 dt, P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ unitaire} \right\}$

Exercice 37 (Centrale PSI 2008) [Solution]

1. Montrer que $\int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$.
2. Donner une base orthonormée de $F = \{t \mapsto at + bt^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Déterminer le couple (a, b) tel que $\int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$ soit minimale.

Exercice 38 (ENSAM PSI 2010) [Solution]

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi])$ du produit scalaire $(f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t) dt$.

1. Calculer $(\cos|\sin), \|\cos\|, \|\sin\|, (id|\cos)$ et $(id|\sin)$.
2. Déterminer la projection orthogonale de l'application identité sur l'espace engendré par \cos et \sin .
3. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a \cos t + b \sin t - t)^2 dt$.

Exercice 39 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = - \int_0^1 P(t)Q(t) \ln(t) dt$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 40 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

On pose $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X], \int_0^1 (t^3 - t)P'(t) dt = \int_0^1 tP(t) dt \right\}$ et on munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $d(Q, F)$ avec $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.
indication : pour aller plus vite, on peut trouver un vecteur normal à F (qui est un hyperplan)

Exercice 41 (X PC 2010) [Solution]

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la base orthonormale $(1, X, X^2, X^3)$.

1. Montrer que $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 2.
2. Déterminer la projection orthogonale sur W .

Exercice 42 (CCINP PSI 2022) [Solution]

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$

1. Donner un vecteur normal à $H_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$
2. Calculer $\inf_{P \in H_1} \|P\|$ où $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 1\}$

Exercice 43 (Centrale PSI 2009) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une base orthonormée du sous-espace V_0 des polynômes dont la somme des coefficients vaut 0.
3. Si V_1 est le sous-espace (affine) des polynômes dont la somme des coefficients vaut 1, déterminer $\inf_{P \in V_1} \|P\|$.

Exercice 44 (Centrale PC 2010) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $H_n = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera une équation cartésienne dans la base canonique.
3. Trouver $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que H_2 soit le noyau de ϕ définie par $\phi(P) = (A_2|P)$, puis calculer la distance de X^2 à H_2 .

Exercice 45 (CCP PSI 2023) [Solution]

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour que $\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans ce cas, calculer la distance de X^n à $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.
indication : commencer par définir F à l'aide d'un produit scalaire.

Exercice 46 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soient a_0, \dots, a_n des réels deux à deux distincts

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.
Montrer rapidement que F est un sous-espace vectoriel, déterminer son orthogonal, sa dimension puis calculer $d(1, F)$

Exercice 47 (CCP PSI 2017) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$; donner sa dimension et $d(X^k, E)$.

Exercice 48 (CCINP PSI 2023) [Solution]

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^n p_k q_k$ où (p_k) et (q_k) sont les coefficients de P et Q .
Déterminer la projection orthogonale de 1 sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$.

Exercice 49 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $P = 1 + X + X^2$ sur $F = \{Q \in \mathbb{R}_2[X], Q'(0) = 0\}$.
indication : le projeté orthogonal de P se trouve sans chercher une bon de F.

Exercice 50 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$

1. Montrer que $(|)$ est un produit scalaire sur E .
2. Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. Soit $F = \{f : x \in [0, 1] \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $g : x \mapsto x \ln(x)$ sur F .
4. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$

Exercice 51 (Mines-Ponts MP 2007) [Solution]

A l'aide d'un projecteur sur un espace judicieusement choisi, minimiser

$I_{a,b} = \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$ et préciser les valeurs de a et b réalisant ce minimum.

Exercice 52 (Centrale PC 2010) [Solution]

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_1^e (\ln t - a - bt)^2 dt$.

Exercice 53 (Mines-Ponts PC 2012) [Solution]

Calculer $\min_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t - \alpha t^2 - \beta)^2 e^{-t} dt$

Exercice 54 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln(x) - ax - b|^2 dx$.
2. Même question avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soient $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\phi(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
2. Calculer $\|\arcsin\|$
3. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(\arcsin t - at - b)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Exercice 56 (CCP PSI 2018) [Solution]

Pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(M, N) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} n_{i,j}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose $H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} = 0 \right\}$. Calculer $d = \inf_{M \in H} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
indication : déterminer un vecteur normal à H (après avoir justifié que c'est un hyperplan)

Exercice 57 (CCP MP 2009) [Solution]

1. Montrer que $(A|B) = \text{Tr}({}^t AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3. Exprimer la distance d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Donner la distance de la matrice J dont tous les coefficients valent 1 à H .

Exercice 58 (CCP PSI 2007) [Solution]

1. Montrer que $f(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\left[I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.
3. Donner le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur l'espace engendré par cette famille.

Exercice 59 (Mines-Télécom 2023) [Solution]

1. Montrer que $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sev de E et déterminer une base orthonormée de F^\perp .
3. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F^\perp .

Exercice 60 (Centrale PSI 2023) [Solution]

1. Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est définie et munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire.
2. On note $F = \text{Vect}\{X, X^2, \dots, X^n\}$ et (P_0, \dots, P_n) la base orthonormalisée à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $P_k(0)^2$.
3. En déduire une base de F^\perp et $d(1, F)$.

Exercice 61 (CCP PC 2006) [Solution]

1. Montrer que $\langle A, B \rangle = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, \langle X^k, 1 \rangle = k!$
2. Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \text{Vect}\{X, X^2, \dots, X^n\}$. Montrer que $\exists (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
3. Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2)\dots(X+k)$; calculer $\langle 1 - Q, X^i \rangle$ et montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$.
4. Montrer que $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$

VIII Formes linéaires et vecteur normal

Exercice 62 (Centrale PSI 2010) [Solution]

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ et on note δ l'application définie par $\delta(P) = P(0)$.

1. Montrer l'existence d'un unique polynôme Ω de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = (\Omega|P)$. Montrer que $\deg(\Omega) = n$.
2. On se place cette fois dans $\mathbb{R}[X]$
 - a) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], |(Q|P)| \leq K\|P\|$.
 - b) Calculer $\delta((1-X)^n)$ et $\|(1-X)^n\|$. Le résultat de la question 1 est-il encore valable sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 63 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ et $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$.

1. Si (f_1, \dots, f_n) est libre et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe $(g_1, \dots, g_n) \in E^n$ tel que $\forall (i, j), m_{i,j} = \int_0^1 f_i(t)g_j(t) dt$.

indication : utiliser $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ et la forme linéaire de matrice $(m_{1,j} \dots m_{n,j})$ dans $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$.

2. Étudier la réciproque.

Exercice 64 (Mines-Ponts MP 2006) [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = \int_0^1 \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 65 (Mines-Ponts MP 2009) [Solution]

Pour $n \geq 1$, établir l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire tel que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^{+\infty} t^k P(t)e^{-t} dt = 0$. Que subsiste-t-il de ce résultat lorsque l'on cherche P dans $\mathbb{R}[X]$ (et $k \in \mathbb{N}$)?

Solutions

Exercice 1 [sujet] $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 [sujet] 1. $H = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3), \frac{1}{\sqrt{15}}(2e_1 - e_2 - e_3 - 3e_4) \right\}$

2. $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $d(e_1, H)^2 = \|e_1\|^2 - \|\pi_H(e_1)\|^2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Exercice 3 [sujet] n est unitaire et normal au plan donc $s(u) = u - 2(n|u)n$ et $S = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [sujet] $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5 [sujet] 1. Si $u = a + b$ avec $a \in H$ et $b \perp H$ alors $v = r(u) = a - b$ donc (Pyth) $\|u\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|v\|^2$.

2. Si $\|u\| = \|v\|$ alors $(u + v|u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ donc $u = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v)$ avec $u + v \in H = \text{Vect}\{u - v\}^\perp$ et $r_H(u) = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v) = v$

3. On a $\|u\| = \|v\| = \sqrt{3}$ donc il s'agit de la réflexion par rapport à $\text{Vect}\{u - v\}^\perp : u - v = (1, 0, 0, -1)$ puis $r_H(x) = 2\pi_H(x) - x = x - 2\pi_D(x)$ avec $\pi_D(x) = \frac{(u - v|x)}{\|u - v\|^2}(u - v)$ car $\frac{u - v}{\|u - v\|}$ est une base de $D = H^\perp$. On a donc

$$r_H(x, y, z, t) = 2 \frac{x - t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r_H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 [sujet] 1. par récurrence on trouve $P_{n+1} = P'_n - 2XP_n$ puis $\deg(P_n) = n$

2. si $n < m$ alors $(P_n|P_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)\phi^{(m)}(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'_n(t)\phi^{(m-1)}(t) dt = \dots = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(n)}(t)\phi^{(m-n)}(t) dt = (-1)^n P_n^{(n)} \left[\phi^{(m-n-1)}(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car $P_n^{(n)}$ est constant.

3. Par degrés étagés, (P_0, \dots, P_{n-1}) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$. Si les racines de P_n où P_n change de signe (donc d'ordres de multiplicité impairs) sont a_1, \dots, a_m avec $m < n$ et si $Q = (X - a_1) \dots (X - a_m)$ (qui change de signe en même temps que P_n) alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a $(P_n|Q) = 0$ mais $(P_n|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)Q(t)\phi(t) dt$ ne peut pas être nul car $t \mapsto P_n(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue, de signe fixe et non nulle. On en déduit que P_n change de signe au moins n fois et comme $\deg(P_n) = n$, P_n est bien SARS.

Exercice 7 [sujet] 1. $t_n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puis $I_n = n!$ par IPP (c'est $\Gamma(n + 1)$)

2. facile (penser à l'intégrabilité)

3. Avec Leibniz : $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n e^{-x} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k$

4. Si $i \leq j$, par IPP, $(L_i|L_j) = \frac{1}{j!} \int_0^{+\infty} L_i(t) \frac{d^j}{dx^j} (e^{-x} x^j)(t) dt = \frac{-1}{j!} \int_0^{+\infty} L'_i(t) \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} (e^{-x} x^j)(t) dt = \dots = \frac{(-1)^i}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(i)}(t) \frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}} (e^{-x} x^j)(t) dt$. Si $i < j$ alors $\int_0^{+\infty} \frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}} (e^{-x} x^j)(t) dt = 0$ et (si $i = j$), on a $\|L_i\|^2 = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \times i! e^{-t} t^i dt = 1$.

5. $L_n \in \text{Vect}\{L_0, \dots, L_{n-1}\}^\perp = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc si on suppose que L_n change de signe en $x_1 < \dots < x_p$ sur \mathbb{R}^+ et que $p < n$, on introduit $Q = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$ (qui change de signe en même temps que L_n sur \mathbb{R}^+ , on a $\deg(Q) = p \leq n-1$ donc $(Q|L_n) = 0$, ce qui est absurde car $(Q|L_n) = \int_0^{+\infty} Q(t)L_n(t)e^{-t} dt$ et $t \mapsto Q(t)L_n(t)e^{-t}$ est de signe fixe, continue et non nulle sur \mathbb{R}^+ . On a donc $p \geq n$. Comme $\deg(L_n) = n$, L_n a au plus n racines donc $p = n$ et toutes ces racines sont simples.

Exercice 8 [sujet] Si $(f|f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$ donc $f' = 0$ car $(f')^2$ est \mathcal{C}^0 positive; le reste facile

Exercice 9 [sujet] 1. Si $(f|f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $\int_{-1}^1 f'(t)^2 dt = 0$ donc (fonction continue positive) $f' = 0$ et $f = 0$ car $f(0) = 0$.

2. Par orthonormalisation de $(1, X, X^2)$ (qui est déjà orthogonale!) on trouve $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}X, \frac{3}{2\sqrt{2}}X^2\right)$.

Exercice 10 [sujet] 1. E sev facile, φ est bijective donc $\dim(E) = 4$ puis on a une base en prenant les 4 suites définies par $u_{n+4} = u_n$ avec $u_0, u_1, u_2, u_3 = 1, 0, 0, 0$ puis $0, 1, 0, 0$, puis $0, 0, 1, 0$ et $0, 0, 0, 1$

2. Si $\phi(u, u) = 0$ alors $ku_k - u_{k+1} = 0$ pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ce qui donne $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ puis $u = 0$ par 4-périodicité

3. On a $\phi(u, v) = \sum_{k=1}^4 x_k y_k$ (comme le prod scal canonique sur \mathbb{R}^4) donc on aura une bon si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = E_i$

($i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$), E_i vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4). Reste à résoudre les systèmes $A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = E_i$ avec $A =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est inversible. Les valeurs de u_i , $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ définissent la suite par 4-périodicité.

Exercice 11 [sujet] 1. Cours

2. Si $(P|P) = 0$ alors $P(k) + P(1) = 0$ pour $k \in [0, 3]$ donc $(k = 1) P(1) = 0$ puis $P(k) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et P possède au moins 4 racines distinctes; le reste est facile

3. On remarque que (L_0, L_2, L_3) est déjà orthonormée donc il suffit de redresser (puis normer) L_1 ; on trouve $\frac{1}{\sqrt{7}}(L_1 - L_0 - L_2 - L_3)$

Exercice 12 [sujet] On a $B(X, X) = \int_0^1 tP(t)^2 dt$ si $P = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$ donc $B(X, X) \geq 0$ et si $B(X, X) = 0$ alors $P(t) = 0$ pour $t \in]0, 1[$ (XP^2 est continu et positif) donc P a une infinité de racines donc est nul et les x_i sont nuls.

Exercice 13 [sujet] 1. $(P|P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt \geq 0$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif), $P(e^{it}) = 0$ si $t \in [0, 2\pi]$ donc P admet une infinité de racines (tout le cercle unité).

2. $\|P\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} (\sup_{|z|=1} |P(z)|)^2 \times 2\pi$ par inégalité de la moyenne. Si $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)| = 1$, on a égalité dans la majoration précédente, ce qui ne se produit que si $t \mapsto |P(e^{it})|$ est une fonction constante sur $[0, 2\pi]$. On a donc $P(z)P\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda$ si $|z| = 1$ puis $z^n P(z)P\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda z^n$; le polynôme (c'en est un) $X^n P(X)P\left(\frac{1}{X}\right)$ et λX^n sont égaux sur $\{|z| = 1\}$ donc sont égaux. Si r est le degré du terme de plus bas degré de P , le degré de $X^n P(X)P\left(\frac{1}{X}\right)$ est $n + (n - r)$; on en déduit $n = r$ donc P est un monôme puis $P = X^n$ (qui est évidemment solution).

3. On a $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k X^k$ avec $\sum_{k=1}^n a_k = 1$; la base canonique étant orthonormale, on a $\|P\|^2 = 1 + \sum_{k=1}^n a_k^2$ et par

Cauchy-Schwarz, $1 = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$ donc $\|P\|^2 \geq 1 + \frac{1}{n}$ ce qui donne le résultat avec la première question.

Exercice 14 [sujet] 1. $P(t)Q(t)e^{-t^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $(P|Q)$ existe et si $(P|P) = 0$ alors $\int_{\mathbb{R}} P(t)^2 e^{-t^2} dt = 0$ donc (continu positif) $P(t) = 0$ pour tout réel t .

2. fait en cours

3. On vérifie en utilisant le changement de variable $u = -t$ que $(-1)^n P_n(-X)$ est aussi une famille orthogonale de degré n et de coefficient dominant 1; par unicité $P_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$.

4. fait en cours

Exercice 15 [sujet] pour $u \geq a$, on a $(f(u) - f(a))^2 = \int_a^u f'(t) dt \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \int_a^u 1 dt \times \int_a^u f'(t)^2 dt \leq (u - a) \int_a^u f'(t)^2 dt$ ce qui donne l'inégalité e,n intégrant celle ci pour $u \in [a, b]$.

Si on a égalité alors la dernière inégalité donne $(f(u) - f(a))^2 = (u - a) \int_a^u f'(t) dt$ donc f est de la forme $f(u) = f(a) + \alpha\sqrt{u-a}$ mais comme $f \in C^1([a, b])$, on trouve $\alpha = 0$ donc f est Cte (récip OK)

Exercice 16 [sujet] 1. $\left(\int_0^1 f(t)^3 dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f(t)^{1/2} \times f^{5/2} dt\right)^2 \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \int_0^1 f(t) dt \int_0^1 f(t)^5 dt$. On a égalité dans C-Sch si et seulement si $f^{1/2}$ et $f^{5/2}$ sont liées, ie $f^5 = \lambda f$ donc si et seulement si f est constante (car f est positive)

2. On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \leq x \leq 1$ puis $f^5 \leq f$ donc la question précédente donne $\left(\int_0^1 f(t)^3 dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t) dt \int_0^1 f(t)^5 dt \leq \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2$

Exercice 17 [sujet] 1. Si $(f|f) = 0$ alors (continue positive) $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$ pour $t \in [0, 1]$ donc $f = 0$.

2. Si $f \in V$ et $g \in W$ alors $(f|g) \int_0^1 f(t)g''(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt = [f(t)g'(t)]_0^1 = 0$.

Pour $f \in E$, on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(t) = f(t) - \alpha \text{ch}(t) - \beta \text{sh}(t)$ s'annule en 0 et 1; il suffit de prendre $\alpha = f(0)$ et $\beta = \frac{1}{\text{sh}(1)}(f(1) - \alpha \text{ch}(1))$. On a alors $f(t) = g(t) + \alpha \text{ch}(t) + \beta \text{sh}(t)$ avec $g \in V$ et $\alpha \text{ch} + \beta \text{sh} \in W$.

Exercice 18 [sujet] 1. cours

2. Si $u \in F$ et $v \in G$ alors $uv = 0$ donc $(u|v) = 0$ et $F \perp G$. Les deux espaces ne sont pas supplémentaires car si $f \in F + G$ alors $f(0) = 0$ donc la fonction constante 1 est dans E mais pas dans $F + G$.

3. cours.

4. On a $f_n \in F$ donc $\langle f_n, g \rangle = 0$ et $\langle f_n, g \rangle = g(0) \int_{-1}^{-1/n} g(t) dt - ng(0) \int_{-1/n}^0 tg(t) dt$ car $f_n(t) = -ntg(0)$ sur $[-1/n, 0]$. On fait ensuite tendre n vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-1/n} g(t) dt = \int_{-1}^0 g(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_{-1/n}^0 tg(t) dt = 0$ car $\left| n \int_{-1/n}^0 tg(t) dt \right| \leq n \|g\|_{\infty} \int_{-1/n}^0 t dt = \frac{\|g\|_{\infty}}{2n}$.

On a encore $f \in F$ donc $\langle f, g \rangle = 0$ mais cette fois $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^0 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^0 g(t)^2 dt - g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = \int_{-1}^0 g(t)^2 dt$; on en déduit $g(t) = 0$ sur $[-1, 0]$ (g^2 est positive et continue) donc $g \in G$.

Exercice 19 [sujet] 1. $(x|f(y)) = {}^t XAY = -{}^t (AX)Y = -(f(x)|y)$

2. $\det(A) = (-1)^n \det({}^t A) = (-1)^n \det(A)$ donc f n'est pas bijective si n est impair.

3. $\text{Im}(f)$ est stable (donc un tel endo induit existe). On vérifie $\ker(f) \perp \text{Im}(f)$: si $f(x) = 0$ et $y = f(z)$ alors $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = 0$ donc $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$; l'endomorphisme induit sur $\text{Im}(f)$ est donc bijectif, et reste antisymétrique (prendre une bon adaptée) donc $rg(f)$ est pair.

4. Dans une bon adaptée (si $f \neq 0$ alors $rg(f) = 2$ forcément), on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec A' antisymétrique de taille 2.

On a $\mathcal{X}_A = X(X^2 + a^2)$ n donc \mathcal{X}_A n'est scindé que si $a = 0$ donc seul $f = 0$ est DZ

Exercice 20 [sujet] 1. On a $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$ si $i \neq j$ donc $(f(e_i) - f(e_j)|f(e_i) + f(e_j)) = 0$ ce qui donne $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

2. Avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ donc comme $(f(e_i))$ est une famille orthogonale, par Pythagore, on a $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mu^2$.

Exercice 21 [sujet] 1. cours

2. si $\mathcal{B} = (u, v, e_3, \dots, e_n)$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} (u|v) & \|v\|^2 \\ -\|u\|^2 & -(u|v) \end{pmatrix}$
3. $\mathcal{X}_{\varphi} = X^{n-2}[X^2 - (u|v)^2 + \|u\|\|v\|]$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} par C-Sch donc φ n'est pas DZ.

Exercice 22 [sujet] 1. Soit $v(x) \in \text{Im}(v)$ et $y \in \ker(u)$, on a $(v(x)|y) = (u|u(y)) = 0$ donc $\text{Im}(v) \subset (\ker(u))^{\perp}$. Si $x \in \ker(u)^{\perp} = (\text{Im}(u))^{\perp}$ alors $\forall y \in E, (x|u(y)) = 0$ donc $(v(x)|y) = 0$ pour tout $y \in E$; ce qui donne $v(x) \in E^{\perp} = \{0\}$ donc $x \in \ker(v)$. On a donc $E = \ker(u) \oplus \ker(u)^{\perp} = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v)^{\perp}$.

2. Si $x \in \ker(u+v)$, on a $u(x) = -v(x) \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$ donc $u(x) = v(x) = 0$ puis $x \in \ker(u) \cap \ker(v) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(u)^{\perp} = \{0\}$ (on prouve $\ker(v) = \text{Im}(u)^{\perp}$ en échangeant u et v dans la preuve de la première question).

Exercice 23 [sujet] 1. Si $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$ alors, d'après Cauchy-Schwarz, $(x+ty|p(x+ty)) \leq \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ et $(x+ty|p(x+ty)) = (x+ty|ty)$; on a donc $\|x\|^2 + t(x|y) \geq 0$ pour tout réel t , ce qui impose $(x|y) = 0$ (si t tend vers $\pm\infty$). Réciproque : Bessel

2. Si P est la matrice de p dans une bon (e_i) alors $|p_{i,j}| = |(e_i|p(e_j))| \leq 1$ par Cauchy-Schwarz donc l'ensemble des projecteurs orthogonaux est borné. Si (p_n) est une suite de projecteurs orthogonaux qui CV vers f alors $p_n^2 = p_n$ donc $f^2 = f$ (car $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire donc continue) et $\|p_n(x)\| \leq \|x\|$ donne $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$; f est donc un projecteur orthogonal et l'ensemble des projecteurs orthogonaux est fermé.

Exercice 24 [sujet] Pour $n = 1 : u_i = \alpha_i e$ avec e une bon de E ; on a $(u_1|u_2)(u_1|u_3)(u_2|u_3) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2 \geq 0$ donc un des produits scalaires au moins est positif.

On suppose le résultat vrai pour $n+2$ vecteurs d'un espace préhilbertien de dimension n et soit $(u_1, \dots, u_{n+3}) \in E^{n+3}$ avec $\dim(E) = n+1$. Si $u_{n+3} = 0$ alors i qlcque et $j = n+3$ conviennent. Sinon on pose $H = \text{Vect}\{u_{n+3}\}^{\perp}$ et $v_i = \pi_H(u_i) = u_i - \frac{(u_{n+3}|u_i)}{\|u_{n+3}\|^2} u_{n+3}$; comme $\dim(H) = n$, par HR, il existe $1 \leq i \neq j \leq n+2$ tels que $(v_i|v_j) \geq 0$. Comme $(v_i|v_j) = (u_i|u_j) - \frac{(u_{n+3}|u_i)(u_{n+3}|u_j)}{\|u_{n+3}\|^2}$, les 3 produits scalaires ne peuvent pas être négatifs strictement.

Exercice 25 [sujet] On vérifie que $E = A \oplus B \oplus C$ et si $x = u+v+w$ (décomposition suivant la somme directe précédente), on a $s_C(x) = -u - v + w$, $s_B \circ s_A(x) = s_B(u - v - w) = -u - v + w$ et $s_A \circ s_B(x) = s_A(-u + v - w) = -u - v + w$.

Exercice 26 [sujet] 1. cours

2. fait en cours
3. $\inf_{X \in \mathbb{R}^n} (f(X)) = d(Y, \text{Im}(A))$ est atteinte en un unique point $Y_0 = \pi_{\text{Im}(A)}(Y)$ donc $f(X_0) = d(Y, \text{Im}(A))$ si et seulement si $AX_0 = Y_0$. Par définition du projeté orthogonal, on a $AX_0 = Y_0$ si et seulement si $AX_0 \in \text{Im}(A)$ (évident) et $Y - AX_0 \in \text{Im}(A)^{\perp} = \ker({}^t A)$ donc si et seulement si ${}^t A(Y - AX_0) = 0$.

Exercice 27 [sujet] 1. Cours

2. Cours
3. On a $n = \sum_{i=1}^n x_i \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = n$ donc $(x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, \dots, 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (à cause de la première égalité); on en déduit $x_i = 1$ pour tout i ; récip OK

Exercice 28 [sujet] 1. Si C_i sont les colonnes de M , comme \mathcal{B} est une bon, on a $(u_i|u_j) = {}^t C_i C_j$ donc $G = {}^t M M$ et $\det(G) = (\det(M))^2 \geq 0$. De plus $\det(G) = 0$ si et seulement si $\det(M) = 0$ donc si et seulement si $M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ce qui équivaut à (u_i) liée.

2. On introduit $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_r)$ une bon de $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$ que l'on complète en une bon $\mathcal{B} = (e_i)_{i \leq n}$ de E . La famille $(u_1, \dots, u_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si (u_1, \dots, u_p) est libre; on peut lui appliquer la première question : on a $G = \begin{pmatrix} G_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$ où $G_p = ((u_i|u_j))_{i,j \leq p}$ donc $\det(G_p) = \det(G) \geq 0$. De plus $\det(G_p) = 0$ si et seulement si $\det(G) = 0$ donc si et seulement si $(u_1, \dots, u_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est liée, ce qui équivaut à (u_1, \dots, u_p) est liée.

Exercice 29 [sujet] On a $d^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2(x_i|x_j) + \|x_j\|^2 = 2 - 2(x_i|x_j)$ donc $(x_i|x - j) = 1 - \frac{d}{2}$. Soit $G \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de coeff $(x_i|x_j)$, (x_i) est liée (car $p > n$), donc il existe j tel que $x_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i x_i$; on vérifie alors que $C_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i C_i$ (colonnes de G) donc G n'est pas inversible. On vérifie que $G^2 - \left(d - p + p \frac{d}{2}\right) G + \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2}(1-p) + p\right) I_p = 0$ donc $\frac{d}{2} \left(\frac{d}{2}(1-p) + p\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{2}(1-p) + p = 0$ (*) (sinon on calcule l'inverse avec ce polynôme annulateur dont le coeff constant est non nul). On en déduit que la matrice $G' = ((x_i|x_j))_{1 \leq i, j \leq p-1}$ qui est de la même forme est inversible (car $p-1$ ne vérifie plus (*)); la famille x_1, \dots, x_{p-1} est donc libre et $p-1 \leq n$ donc $n = p+1$.

Exercice 30 [sujet] 1. facile

2. La famille est orthogonale, formée de vecteurs non nuls, donc libre et $p \leq \dim(E \times \mathbb{R}) = n+1$.

Exercice 31 [sujet] On a $1 = \|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j \neq i} (e_j|e_i)^2$ donc $(e_j|e_i) = 0$ (somme de termes positifs qui est nulle); la famille est orthonormale. Si $x \in \text{Vect}\{e_i\}^\perp$ alors $\|x\|^2 = 0$ donc $\text{Vect}\{e_i\}^\perp = \{0\}$ et $E = \text{Vect}\{e_i\}$ donc c'est une bon.

Exercice 32 [sujet] Par identité de polarisation $(x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)(e_i|y) = \left(\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \middle| y \right)$.

Pour $x \in E$, on a $\left(x - \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \middle| y \right) = 0$ pour tout $y \in E$ donc $x = \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \in \text{Vect}\{e_i\}$; (e_i) est donc une base de

E . Enfin, $e_j = \sum_{i=1}^n (e_i|e_j)e_i$ donne $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ en identifiant les coefficients dans cette égalité (la famille est libre).

Exercice 33 [sujet] 1. $\|e_i\|^2 - \|e_i\|^4 = \sum_{j \neq i} (e_j|e_i)^2 \geq 0$ donc $\|e_i\| \leq 1$.

2. La liberté donne l'existence d'un tel $x : E$ est de dimension au moins égale à n (ou infinie). On a $1 = \|x\|^2 = (e_n|x)^2$ puis par C-Sch $1 = (e_n|x)^2 \leq \|e_n\|^2 \|x\|^2 = \|e_n\|^2$ donc $\|e_n\| \geq 1$ puis $\|e_n\| = 1$.

3. On trouve de même $\|e_i\| = 1$ donc avec l'égalité de a), il reste $\sum_{j \neq i} (e_j|e_i)^2 = 0$ donc $(e_j|e_i) = 0$ (somme de termes positifs nulle) donc (e_i) est orthonormale puis une base car si $E \neq \text{Vect}\{e_i\}$, on prend $x \in \text{Vect}\{e_i\}^\perp \setminus \{0\}$ et on a $\|x\|^2 = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 34 [sujet] Si $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}^\perp$ alors $\|x\|^2 = 0$ donc $E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\dim(E) = n$. La famille (e_1, \dots, e_n) est donc une base de E et on peut alors utiliser l'exercice précédent (avec une famille libre).

Exercice 35 [sujet] 1. Cours

2. $(1, \sqrt{3}(2X-1))$

3. On cherche $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|^2 = \frac{1}{5} - \langle 1, X^2 \rangle^2 - \langle \sqrt{3}(2X-1), X^2 \rangle^2 = \frac{1}{180}$

Exercice 36 [sujet] 1. cours

2. Comme $\int_{-1}^1 P(t) dt = (P|1)$ et $\|1\|^2 = 2$, il s'agit du cas d'égalité dans C-Schw : les solutions sont les P tels que $(1, P)$ est liée donc les polynômes constants.

3. Facile puis $\text{Vect}\{P_0, P_1, P_2\} = \mathbb{R}_2[X]$

4. $\pi_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{(P_0|X^3)}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{(P_1|X^3)}{\|P_1\|^2} P_1 + \frac{(P_2|X^3)}{\|P_2\|^2} P_2 = \dots$ puis comme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ unitaire s'écrit $X^3 - aX^2 - bX - c$,

$$I = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - \pi_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \left(\frac{(P_0|X^3)}{\|P_0\|^2} \right)^2 - \left(\frac{(P_1|X^3)}{\|P_1\|^2} \right)^2 - \left(\frac{(P_2|X^3)}{\|P_2\|^2} \right)^2$$

Exercice 37 [sujet] 1. cours

2. On orthonormalise (X, X^2) : on trouve $\left(\sqrt{3}X, 2\sqrt{\frac{10}{3}} \left(X^2 - \frac{3}{4}X \right) \right)$

3. La distance est minimale ssi $aX + bX^2 = -\pi_F(1) = -3(X|1)X - \frac{40}{3} \left(X^2 - \frac{3}{4}X \middle| 1 \right) \left(X^2 - \frac{3}{4}X \right) = \frac{5}{9}X^2 - \frac{23}{12}X$.

Exercice 38 [sujet] 1. $(\cos|\sin) = 0$, $\|cos\| = \|\sin\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $(id|\cos) = -2$ et $(id|\sin) = \pi$

2. Une bon de $F = \text{Vect}\{\sin, \cos\}$ est $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\right)$ donc $\pi_F(id) = \frac{2}{\pi}(\cos |id) \cos + \frac{2}{\pi}(\sin |id) \sin = \frac{2}{\pi} - (2 \cos + \pi \sin)$.

3. On cherche $d(id, F)^2 = \|id - \pi_F(id)\|^2 = \|id\|^2 - \|\pi_F(id)\|^2 = \frac{\pi^3}{3} - \frac{4}{\pi^2}(4 + \pi^2)$.

Exercice 39 [sujet] 1. $P(t)Q(t) \ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(\ln(t))$, le reste est facile.

2. On vérifie (IPP) $\varphi(X^k, X^h) = \int_0^1 t^{h+k} \ln(t) dt = \frac{1}{(1+h+k)^2}$ puis une bon de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\left(1, \frac{3}{\sqrt{7}}(4X-1), \dots\right)$ et $\pi_{\mathbb{R}_3[x]} = \dots$ beurk!

Exercice 40 [sujet] 1. Facile

2. $\int_0^1 (t^3 - t)P'(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_0^1 (3t^2 - 1)P(t) dt$ donc $F = \text{Vect}\{3X^2 - X - 1\}^\perp$ puis $d(Q, F) = \|\pi_{F^\perp}(Q)\| = \frac{|(3X^2 - X - 1|Q)|}{\|3X^2 - X - 1\|}$

Exercice 41 [sujet] 1. $P \in W \Leftrightarrow P = (X^2 - 1)(aX + b)$ donc $W = \text{Vect}\{(X^2 - 1), X(X^2 - 1)\}$ est de dimension 2 car les deux polynômes sont libres.

2. La base canonique étant orthonormale, $(P|Q) = \sum_{i=0}^3 p_i q_i$ (les coeff); une bon de W est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}X(X^2 - 1)\right)$ donc $\pi_W(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1|P)(X^2 - 1) + \frac{1}{2}(X(X^2 - 1)|P)X(X^2 - 1)$.

Exercice 42 [sujet] 1. $P(1) = \sum_{k=0}^n a_k$ donc $H_0 = \{1 + X + \dots + X^n\}^\perp$ (hyperplan)

2. $P \in H_1$ si et seulement si $P = 1 - Q$ avec $Q \in H_0$. On demande donc $d(1, H_0) = \|\pi_{H_0^\perp}(1)\| = \frac{|(1|1 + \dots + X^n)|}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Exercice 43 [sujet] 1. Si $(P|P) = 0$ alors $P(i) = 0$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$; P a au moins $(n+1)$ racines distinctes donc est nul.

2. $V_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. La famille des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $0, 1, \dots, n$ est donc une bon de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $V_0 = \text{Vect}\{L_0, L_2, \dots, L_n\} = \text{Vect}\{L_1\}^\perp$.

3. $\left(\inf_{P \in V_1} \|P\|\right)^2 = d(1, V_0)^2 = \|1 - \pi_{V_0}(1)\|^2 = \|\pi_{\text{Vect}\{L_1\}}(1)\|^2 = (L_1|1)^2 = 1$.

Exercice 44 [sujet] 1. Si $(P|P) = 0$ alors $\llbracket 0, n \rrbracket$ sont $(n+1)$ racines distinctes de P donc $P = 0$.

2. $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in H_n$ si et seulement si $\sum_{k=0}^n a_k \frac{1 + (-1)^k}{k+1} = 0$; $H_n = \ker(\varphi)$ où $\varphi : P \mapsto \int_{-1}^1 P(t) dt$ est une forme linéaire non nulle ($\varphi(1) = 2$) donc H_n est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(H_n) = n$.

3. $H_2 = \text{Vect}\{X, 3X^2 - 1\}$; il suffit que A_2 soit un vecteur normal à H_2 : si $P = a + bX + cX^2$ alors $\begin{cases} (P|X) = 0 \\ (P|3X^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 5b + 9c = 0 \\ 6a + 12b + 23c = 0 \end{cases}$ donc $A_2 = 6X^2 - 15X + 7$ convient.

$d(X^2|H_2) = \|\pi_{\text{Vect}(A_2)}(X^2)\| = \frac{|(X^2|A_2)|}{\|A_2\|^2} = \frac{1}{27}$.

Exercice 45 [sujet] 1. On vérifie que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est toujours bilinéaire symétrique positive. Si les a_i sont 2 à 2 distincts et si $(P|P) = 0$ alors $P(a_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc P a $(n+1)$ racines distinctes donc est nul est $(|)$ est un produit scalaire. Dans le cas contraire, si $a_0 = a_1$ par exemple, $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $P \neq 0$ et $(P|P) = 0$ donc $(|)$ n'est pas un produit scalaire.

2. On a $F = \text{Vect}\{1\}^\perp$ donc $d(X^n, F) = \|\pi_{\text{Vect}\{1\}}(X^n)\| = \frac{|(1|X^n)|}{\|1\|^2} = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^n a_k^n \right|$.

Exercice 46 [sujet] 1. Si $(P|P) = 0$ alors $P(a_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc P a $(n+1)$ racines distinctes donc est nul est $(|)$ est un produit scalaire.

2. On a $F = \text{Vect}\{1\}^\perp$ donc $\dim(F) = n$ et $d(X^n, F) = \|\pi_{\text{Vect}\{1\}}(X^n)\| = \frac{|(1|X^n)|}{\|1\|^2} = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^n a_k^n \right|$.

Exercice 47 [sujet] 1. Si $(P|P) = 0$ alors $P^{(k)}(1) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc 1 est racine de P d'ordre $\geq n + 1$ donc $P = 0$.

2. $E = \text{Vect}\{1\}^\perp$ est un hyperplan (donc $\dim(E) = n$) donc $d(X^k, E) = \|\pi_{\text{Vect}\{1\}}(X^k)\| = \frac{|(1|X^k)|}{\|1\|^2} = 1$.

Exercice 48 [sujet] On a $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n p_k = 0 \right\} = \text{Vect}\{Q\}^\perp$ avec $Q = 1 + X + \dots + X^n$; on en déduit $\pi_F(1) = 1 - \frac{(1|Q)}{\|Q\|^2}Q$ avec $(1|Q) = 1$ et $\|Q\|^2 = n + 1$.

Exercice 49 [sujet] 1. Cours

2. F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ dont une base est $(1, X^2)$. On décompose P en $P = (1 + X^2) + X$ et on vérifie $(X|1) = (X|X^2) = 0$ donc $1 + X^2 \in F$ et $X \in F^\perp$ donc $\pi_F(P) = X$.

Exercice 50 [sujet] 1. facile

2. attention au cas $n = 0$: $t^n \ln t \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{-1}{(n+1)^2}$

3. facile : trouver une bon (f_0, f_1) de F puis $\pi_F(g) = (f_0|g)f_0 + (f_1|g)f_1$

4. c'est $d(g, F)^2 = \|g\|^2 - (f_0 - g)^2 - (f_1|g)^2$

Exercice 51 [sujet] On pose $f(t) = t \ln(t)$ (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) et on munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(u|v) = \int_0^1 u(t)v(t) dt$. On a $\min_{a,b} I_{a,b} = d(f, \mathbb{R}_1[X])^2$. Une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, \sqrt{3}(2X - 1))$ donc $\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = (1|f)1 + 3(2X - 1|f)(2X - 1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}(2X - 1)$ donc $\min_{a,b} I_{a,b} = \|f - \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \frac{2}{9} - \frac{1}{16} - \frac{3}{144}$ est atteint si et seulement si $a = -\frac{1}{6}$ et $b = -\frac{1}{6}$.

Exercice 52 [sujet] On munit $\mathcal{C}^0([1, e], \mathbb{R})$ de $(u|v) = \int_1^e u(t)v(t) dt$ et on cherche $d(\ln, \mathbb{R}_1[X])^2$: une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{2\sqrt{3}}{(e-1)^{3/2}}\left(X - \frac{e+1}{2}\right)\right)$ donc $\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = \frac{1}{e-1}(1|f)1 + \frac{12}{(e-1)^3}\left(X - \frac{e+1}{2}\right|f)\left(X - \frac{e+1}{2}\right)$ et $d(f, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|f - \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \dots$

Exercice 53 [sujet] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ qui existe car $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ pour $t \geq 0$ donc P a une infinité de racines donc $P = 0$.

On cherche $d(X, F)^2$ où $F = \text{Vect}\{1, X^2\}$; une bon de F est $\left(1, \frac{1}{2\sqrt{5}}(X^2 - 2)\right)$ donc $\pi_F(X) = (1|X)1 + \frac{1}{20}(X^2 - 2|X)(X^2 - 2) = 1 + \frac{1}{5}(X^2 - 2)$ et $d(X, F)^2 = \|X - \pi_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|\pi_F(X)\|^2 = 2 - \left(1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

Exercice 54 [sujet] 1. On cherche $d(\ln, \mathbb{R}_1[x])^2$ pour le produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 x^2 f(x)g(x) dx$ sur $E = \text{Vect}\{\ln, 1, id\}$; une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(\sqrt{3}, \sqrt{5}(4X - 3))$ puis $d^2 = \|\ln\|^2 - 3(1|\ln)^2 - 5(4X - 3|\ln)^2 = \dots$

2. Si $a = \alpha + i\beta$ et $b = \alpha' + i\beta'$ alors $\int_0^1 x^2 |\ln(x) - ax - b|^2 dx = \int_0^1 x^2 |\ln(x) - \alpha x - \alpha'|^2 dx + \int_0^1 x^2 |\beta x + \beta'|^2 dx \geq d^2$ donc la borne inf dans \mathbb{C}^2 est la même que dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 55 [sujet] 1. $\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$ (idem en -1) donc $\phi(f, g)$ existe; le reste est facile

2. $\|\arcsin\|^2 = \left[\frac{1}{3} \arcsin(t)^3\right]_{-1}^1 = \frac{\pi^3}{24}$

3. C'est $d(\arcsin, \mathbb{R}_1[X])^2$ et $P_0 = \frac{1}{\pi}$, $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X$ est une bon de $\mathbb{R}_1[X], \dots$

Exercice 56 [sujet] 1. cours (produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

2. $H = \text{Vect}\{J\}^\perp$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $d = d(A, H)^2 = \|\pi_{H^\perp}(A)\|^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{(i,j)} a_{i,j} \right)^2$

Exercice 57 [sujet] 1. cours

2. Si $A = {}^t A$ et $B = -{}^t B$ ($A|B$) = $\text{Tr}(AB) = -\text{Tr}(A{}^t B) = -\text{Tr}({}^t BA) = -(B|A) = -(A|B)$

3. $M = \frac{1}{2}(M+{}^t M) + \frac{1}{2}(M-{}^t M)$ est la décomposition de M donc $d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(M-{}^t M) \right\| = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Tr}({}^t M M - M^2)}$

4. $H = \ker(\text{Tr})$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc un hyperplan et $\dim(H) = n^2 - 1$. Comme $H = \text{Vect}\{I_n\}^\perp$, on a $d(J, H) = \|\pi_{\text{Vect}\{I_n\}}(J)\| = \frac{|(I_n|J)|}{\|I_n\|^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 58 [sujet] 1. cours

2. facile

3. Si M est la seconde matrice, une bon de $F = \text{Vect}\{I_3, M\}$ est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}I_3, \frac{1}{\sqrt{3}}M \right)$ et $\pi_F(A) = \frac{1}{3}(I_3|A)I_3 + \frac{1}{3}(M|A)M = I_3 + \frac{1}{3}M$.

Exercice 59 [sujet] 1. cours

2. $F = \text{Vect}\{I_2, A\}$ avec $A = E_{1,2} - E_{2,1}$; $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^\perp$ si et seulement si $(I_2|M) = (A|M) = 0 \Leftrightarrow a + d = b - c = 0$ donc $F^\perp = \text{Vect}\{C, D\}$ avec $C = E_{1,1} - E_{2,2}$ et $D = E_{1,2} + E_{2,1}$ et une bon de F^\perp est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}C, \frac{1}{\sqrt{2}}D \right)$

3. $d(J, F^\perp)^2 = \|\pi_F(J)\|^2 = \frac{1}{2}(I_2|J)^2 + \frac{1}{2}(A|J)^2$ car $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}I_2, \frac{1}{\sqrt{2}}A \right)$ est une bon de F . On trouve $d(J, F^\perp) = 4$.

Exercice 60 [sujet] 1. $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^+$; P a une infinité de racines donc $P = 0$.

2. $1 = \|P_k\|^2 \stackrel{\text{IPP}}{=} P_k(0)^k + 2(P_k|P'_k) = P_k(0)^2$ car $P'_k \in \text{Vect}\{P_0, \dots, P_{k-1}\}^\perp = \text{Vect}\{1, \dots, X^{k-1}\}^\perp = \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ et $\deg(P'_k) \leq k-1$ car $\deg(P_k) = k$ donc $(P_k|P'_k) = 0$.

3. Si on suppose $P_k(0) = 1$ (possible quitte à remplacer P_k par $-P_k$), on a $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k \in F$ ssi $\sum_{k=0}^n a_k = 0$ (équ cartésienne d'un hyperplan) donc $F = \text{Vect}\{Q\}^\perp$ avec $Q = P_0 + P_1 + \dots + P_n$. On a alors $d(1, F)^2 = \|\pi_{F^\perp}(1)\|^2 = \frac{(Q|1)}{\|Q\|^2}$ puis, comme (P_0, \dots, P_n) est une bon, $\|Q\|^2 = n+1$ et $(Q|1) = \sum_{k=0}^n (P_k|1) = (P_0|1) = 1$ car on vérifie $\|1\| = 1$ donc $P_0 = 1$.

Exercice 61 [sujet] 1. $A(t)B(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^+$; P a une infinité de racines donc $P = 0$. $\langle X^k, X^h \rangle = (k+h)!$ par IPP successives.

2. $Q \in F$

3. $\langle 1 - Q, X^i \rangle = i! - \sum_{k=1}^n a_k (k+i)! = i!P(i)$ et si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X^i \in F$ donc $1 - Q \perp X^i$ donne $P(i) = 0$.

4. On cherche $d(1, F)^2 = \|1 - Q\|^2 = \langle 1 - Q, 1 - Q \rangle = \langle 1, 1 - Q \rangle - \langle Q, 1 - Q \rangle = \langle 1, 1 - Q \rangle = P(0)$. On sait que $\deg(P) = n$ et que $1, \dots, n$ sont des racines de P donc $P = \alpha \prod_{k=1}^n (X - k)$. De plus $P(-1) = 1 = (-1)^n \alpha (n+1)!$ donc $\alpha = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ et $P(0) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 62 [sujet] 1. Existence et unicité : cours (δ est une forme linéaire). Si $\deg(\Omega) \leq n-1$ on aurait $(\Omega|X\Omega) = (X\Omega)(0) = 0$ (car $X\Omega \in \mathbb{R}_n[X]$), ce qui est absurde puisque $(\Omega|X\Omega) = \int_0^1 t\Omega(t)^2 dt$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle ($\Omega \neq 0$ sinon on aurait $\delta = 0$, ce qui n'est pas le cas puisque $\delta(1) = 1$).

2. a) Par Cauchy-Schwarz avec $K = \|\Omega\|$.

b) $\delta((1-X)^n) = 1$ et $\|(1-X)^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Si Ω existait, on aurait $|\delta((1-X)^n)| \leq K\|(1-X)^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq K$ ce qui est absurde (mais $\mathbb{R}[X]$ n'est plus de dimension finie).

Exercice 63 [sujet] 1. Soit φ_j la forme linéaire telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_j) = {}^t C_j$; il existe $g_j \in \text{Vect}\{f_1, \dots, f_n\} = F$ telle que $\forall f \in F, \varphi_j(f) = (g_j|f)$. Par définition de la matrice de cette forme linéaire dans \mathcal{B} , on a $m_{i,j} = \varphi_j(f_i) = (g_j|f_i)$.

2. IL suffit d'utiliser $M = I_n$: il existe une famille (g_1, \dots, g_n) telle que $\forall (i, j), (f_i|g_j) = \delta_{i,j}$. Si $\sum \alpha_i f_i = 0$ alors, pour tout j , on a $0 = \sum \alpha_i (f_i|g_j) = \alpha_j$ donc la famille est libre.

Exercice 64 [sujet] On vérifie que $(P|Q) = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc l'intégrale existe; si $(P|P) = 0$ alors (continu positif), $P(t) = 0$ sur $[0, 1[$ donc P possède une infinité de racines et $P = 0$.

$P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire donc l'existence et l'unicité de A est du cours puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

Dans $\mathbb{R}[X]$, si A existait, on aurait (avec $P = (1 - X^2)^n$, pour $n \geq 1$) $1 = \int_0^1 A(t)\sqrt{1-t^2}(1-t^2)^{n-1} dt$; comme $t \mapsto A(t)\sqrt{1-t^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, il existe K tel que $\forall t \in [0, 1], |A(t)\sqrt{1-t^2}| \leq K$, ce qui donne $1 \leq K \int_0^1 |1-t^2|^{n-1} dt$. En posant $t = \cos \theta$, on a $\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \theta d\theta = w_{2n-1}$ (intégrales de Wallis) et comme on a démontré que (w_n) tend vers 0, $1 \leq K w_{2n-1}$ est absurde.

Exercice 65 [sujet] On vérifie que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale existe et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif), $P(t) = 0$ sur \mathbb{R}^+ donc P a une infinité de racines et $P = 0$.

On cherche donc l'existence et l'unicité d'un polynôme P unitaire tel que $P \in \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$; cet ensemble étant une droite, l'existence de P est assurée (et il suffit de le diviser par son coeff dominant pour le rendre unitaire). Si Q est un autre tel polynôme, $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puisqu'ils sont tous deux de degré n et unitaires; on a donc $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ puis $P = Q$.

L'unicité subsisterait si P existait mais si P existait, on aurait $(P|P) = 0$ donc $P = 0$ ce qui est absurde.