Correction du DM10

(extrait de CCINP PSI 2020)

Partie I

1. $\boxed{\mathcal{X}_A = X(X-2)(X+2)}$
2. $\mathcal{X}_A$ est SARS donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\} \text{ et les trois espaces propres sont des droites}}$
3. $\boxed{\mathcal{X}_B = X(X^2+4) = X(X+2i)(X-2i)}$ donc $i\mathcal{X}_B(iX) = i(iX)((iX)^2+4)) = X(X^2-4) = \mathcal{X}_A(X)$
4. $\mathcal{X}_B$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{B \text{ n'est pas DZ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, de plus $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$ et le seul espace propre est une droite (vp simple). Alors que $\mathcal{X}_B$ est SARS dans $\mathbb{C}$ donc $\boxed{B \text{ est DZ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, -2i, 2i\}$, les trois espaces propres étant des droites.
5. On a $D^{-1}AD = \mathrm{diag}(1, -i, -1)A\mathrm{diag}(1, i, -1) = \boxed{-iB}$

Partie II

1. On raisonne par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$: $f_0 = \sin^n \neq 0$ donc (f_0) est libre. Si on suppose $k \leqslant n-1$ et $(f_0, \dots, f_k)$ libre et si $\displaystyle\sum_{h=0}^{k+1} \lambda_h f_h = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{h=0}^{k+1} \lambda_h \cos^h(x) \sin^{n-h}(x) = 0$; pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, en divisant cette égalité par $\sin^{n-k-1}(x)$, on a, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{h=0}^{k+1} \lambda_h \cos^h(x) \sin^{k-h+1} = 0$. Par continuité de sin et cos, cette égalité reste valable aussi pour $x \in \pi\mathbb{Z}$ puis, en prenant $x = 0$, on obtient $\lambda_{k+1} = 0$. On reprend alors l'équation initiale qui devient $\displaystyle\sum_{h=0}^{k} \lambda_h f_h = 0$ et qui donne $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$ par hypothèse de récurrence. On en déduit $\boxed{(f_0, \dots, f_n) \text{ est libre et } \dim(V_n) = n+1}$
2. φ_n est linéaire et $\varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \in V_n$ (pour $k = 0$ et $k = n$, les termes qui apparaîtraient sous la forme f_{-1} et f_{n+1} sont multipliés par un coefficient nul). On en déduit, par linéarité, $\varphi_n(V_n) \subset V_n$ et la matrice de φ_n dans $\mathcal{B}_n$.
3. $g_k(x) = e^{ikx} \times e^{-i(n-k)x}$ donne le résultat.
4. Par la formule du binôme, $g_k(x) = \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} i^{k-p} \cos^p x \sin^{k-p} x\right) \left(\displaystyle\sum_{q=0}^{n-k} \binom{n-k}{q} (-i)^{n-k-q} \cos^q x \sin^{n-k-q} x\right)$ donc $g_k(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q} (-1)^{n-k-q} i^{n-p-q} \underbrace{\cos^{p+q} x \sin^{n-p-q} x}_{=f_{p+q}(x)}$ et $0 \leqslant p+q \leqslant k+(n-k) = n$ donc $\boxed{g_k \in V_n}$
5. $g'_k = i(2k-n)g_k$ donc $\varphi_n(g_k) = i(2k-n)g_k$; comme $g_k \neq 0$, $i(2k-n) \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, les réels $i(2k-n)$ sont deux à deux distincts donc on vient de trouver $n+1$ valeurs propres distinctes de φ_n ; comme $\dim(V_n) = n+1$, $\mathcal{X}_{\varphi_n}$ est SARS et $\boxed{\varphi_n \text{ est DZ et } \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n), k \in [\![0, n]\!]\}}$ Comme les valeurs propres sont simples, les espaces propres sont des droites donc $\boxed{E_{i(2k-n)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{g_k\} \text{ pour } k \in [\![0, n]\!]}$
6. φ_n est bijectif si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi_n)$ donc si et seulement si $\boxed{n \text{ est impair}}$
7. $g_n(x) = e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} \cos^k x \sin^{n-k} x$ donc $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k f_k$ et comme $\ker(\varphi_n - in.id_{V_n}) = E_{in}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{g_n\}$, on a bien $\boxed{\ker(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$ car $B_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_n)$ et $\begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g_n)$.

Partie III

1. $(DM)_{j,k} = d_{j,j}m_{j,k}$ et $(MD)_{j,k} = m_{j,k}d_{k,k}$
2. $(D_n^{-1}A_nD_n)_{j,k} = (-i)^{j-1}a_{j,k}i^{k-1} = (-1)^j i^{j+k} a_{j,k} = \begin{cases} ij & \text{si } k = j+1 \\ -i(n-j+2) & \text{si } k = j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\boxed{D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n}$
   On en déduit $\mathcal{X}_{A_n}(\lambda) = \mathcal{X}_{D_n^{-1}A_nD_n}(\lambda) = \mathcal{X}_{-iB_n}(\lambda) = \det(\lambda I_{n+1} + iB_n) = (-i)^{n+1}\det(i\lambda - B_n)$ donc on en déduit $\boxed{\mathcal{X}_{A_n}(X) = (-i)^{n+1}\mathcal{X}_{B_n}(iX)}$

3. A_n est semblable à $-iB_n$ et comme B_n est DZ, $\boxed{A_n \text{ est DZ}}$ De plus, d'après la relation sur les polynômes caractéristiques précédents, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)$ si et seulement si $i\lambda \in \mathrm{Sp}(B_n)$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A_n) = \{n-2h, h \in [\![0,n]\!]\}}$ (en posant $h = n - n \in [\![0,n]\!]$ pour décrire les valeurs propres de B_n)

Enfin, $A_nX = nX \Leftrightarrow B_nD_n^{-1}X = inD_n^{-1}X \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}, D_n^{-1}X = \alpha \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}, X = \alpha D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ or $\alpha D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ i^n q_n \end{pmatrix} = i^n \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ puis, comme $i^n \neq 0$, on a bien $\boxed{\ker(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$

Partie IV

1. $(E_{k,l})_{0 \leqslant l \leqslant n}$ est un système complet d'événements

2. Comme on déplace une (et une seule) boule à chaque étape, elle peut en contenir $j+1$ ou $j-1$ (si $j \in [\![1, n-1]\!]$)

3. Si $l \in [\![1, n-1]\!]$ et si $E_{k,l}$ est réalisé alors l'urne 1 contient l boules à l'instant k ; elle en contiendra $l+1$ à l'instant $k+1$ si et seulement si le $k+1^{\text{ème}}$ échange se fait de l'urne 2 vers l'urne 1 donc si et seulement si on choisit aléatoirement une des $n-l$ boules de l'urne 2. On a donc $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,l+1}) = \dfrac{n-l}{n}$. On trouve de même $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,l-1}) = \dfrac{l}{n}$ et $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0$ si $j \notin \{l-1, l+1\}$ (d'après la question précédente).
Si $E_{k,0}$ est réalisé alors l'urne 1 est vide donc $E_{k+1,1}$ est certain et si $E_{k,n}$ est réalisé, c'est $E_{k+1,n-1}$ qui est certain.

4. D'après la formule des probabilités totales, $P(E_{k+1,j}) = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})P(E_{k,l})$ ce qui donne, si $j \in [\![1, n-1]\!]$,
$P(E_{k+1,j}) = P_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})P(E_{k,j-1}) + P_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})P(E_{k,j+1}) = \dfrac{n-j+1}{n}P(E_{k,j-1}) + \dfrac{j+1}{n}P(E_{k,j+1})$
De même $P(E_{k+1,0}) = P_{E_{k,1}}(E_{k+1,0})P(E_{k,1}) = \dfrac{1}{n}P(E_{k,1})$ et $P(E_{k+1,n}) = P_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n})P(E_{k,n-1}) = \dfrac{1}{n}P(E_{k,n-1})$

5. On vient de prouver $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n}A_nZ_k$ ce qui donne bien le résultat annoncé par récurrence (ou car (Z_k) est une suite vectorielle géométrique de raison $\dfrac{1}{n}A_n$)

6. La répartition de chaque boule est une expérience de Bernoulli de succès « mettre la boule dans l'urne 1 » donc de paramètre $\dfrac{1}{2}$ que l'on répète indépendamment n fois. L'événement $(N_0 = k)$ correspond donc à l'événement « obtenir exactement k succés » donc $P(E_{0,k}) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$. On a donc $\boxed{Z_0 = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$

7. D'après la partie **III**, Z_0 est donc un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre n donc $A_n^kZ_0 = n^kZ_0$ ce qui donne $\boxed{Z_k = Z_0}$

8. Si N_1 suit la même loi que N_0 alors on a $Z_1 = Z_0$, ce qui donne $A_nZ_0 = nZ_0$ et comme $Z_0 \neq 0$ (la somme de ses coordonnées vaut 1) ; Z_0 est un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre n. Comme $E_n(A_n)$ est une droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, on a donc $Z_0 = \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ et comme la somme des coordonnées de Z_0 vaut 1, on a nécessairement $\alpha = \dfrac{1}{2^n}$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = (1+1)^n = 2^n$; ainsi Z_0 est le vecteur considéré dans la question précédente et $\boxed{N_0 \text{ suit la loi } \pi}$ On a donc bien l'équivalence attendue puisque la réciproque a été étudiée à la question précédente.