PSI2

DM11

(d'après CCP PSI 2009 maths 1)

pour le lundi 13 janvier 2025

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge, on note $\varphi(x)$ sa valeur.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

I Étude de la fonction φ.

On désigne par d (resp. δ) la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ (resp. $\delta(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

1. Étude des fonctions d et δ.

a) Étudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t} \leqslant \alpha$.

b) Étudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leqslant \beta$.

2. Existence de la fonction φ sur $[0,+\infty[$.

Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$.

3. Limite de la fonction φ en $+\infty$.

a) Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

b) Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser **I.1.2**).

4. Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction φ.

a) Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (on pourra utiliser **I.1.1**).

c) Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

d) Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

e) Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

f) Expliciter $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

5. Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.

a) Déterminer la limite de $x \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

c) Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

d) Déterminer $\varphi(0)$.

II Étude de l'existence de J_m.

1. Étude de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

2. Étude de J_1.

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).

3. Étude de l'existence de I_k.

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif I_k (on pourra utiliser une intégration par parties).

4. Étude de la nature de J_m.

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et tout entier relatif k, on note : $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

b) En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

c) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour p entier naturel non nul ?

III Calcul de J_{2p+1}.

1. Étude d'un procédé de calcul.

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeur réelles ; on suppose de plus que f est impaire et dérivable en 0.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

- $\gamma_n = \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$,
- u_n l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = (-1)^n \frac{2tf(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2}$,
- $\mu_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Enfin, on admet que pour tout réel x non entier ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), on a

$$\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2} = 1$$

a) Déterminer la limite de γ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Établir (pour tout entier naturel non nul n) une relation entre γ_n et μ_n.

c) Établir la convergence, pour tout t appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$.

Désormais on note $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ pour tout t appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Calculer $S(t)$ et en déduire que la fonction S est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

e) Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{où } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)$$

En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \gamma_n$ et l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n$.

f) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

g) Justifier la convergence des intégrales généralisées $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

h) Exprimer la différence $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Application au calcul de J_{2p+1}.

a) Retrouver la valeur de J_1 (déjà obtenue en **II.2**).

b) Calculer J_3.

c) Plus généralement, expliciter J_{2p+1} pour tout entier naturel p.