TD15 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $L_i = \displaystyle\prod_{k=0, k\neq i}^{3} \frac{X-k}{i-k}$, pour $i \in [\![0,3]\!]$

1. Calculer, pour $0 \leqslant i,j \leqslant 3$, $L_i(j)$ et en déduire que $(L_i)_{i\in[\![0,3]\!]}$ est une base de E.

2. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(P(k)+P(1))(Q(k)+Q(1))$ définit un produit scalaire sur E

3. Déterminer une base orthonormale de E.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2019)**

1. Montrer que $< f,g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

2. On pose $F = \{u \in E, \forall x \in [0,1], u(x) = 0\}$ et $G = \{u \in E, \forall x \in [-1,0], u(x) = 0\}$. Montrer que $F \perp G$. F et G sont-ils supplémentaires ?

3. Justifier $G \subset F^\perp$.

4. On veut montrer que $G = F^\perp$: pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ g(0) & \text{si } x \in [-1,-1/n] \\ \text{affine} & \text{sur } [-1/n,0] \end{cases}$; calculer $< f_n, g >$ et montrer que $g(0)\displaystyle\int_{-1}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Conclure en utilisant f nulle sur $[0,1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1,0]$.

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Soient E un espace euclidien, $u,v \in E$ linéairement indépendants et $\varphi : x \in E \mapsto (v|x)u - (u|x)v$

1. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{u,v\}$ et son orthogonal sont supplémentaires

2. Écrire la matrice de φ dans une base adaptée à cette décomposition

3. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de E, espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|e_i\| \leqslant 1$.

2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$. *(*)*

3. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 5 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Soit $\mathbb{R}^4$ euclidien, muni de sa base canonique $B = (e_1,e_2,e_3,e_4)$

1. Trouver une base orthonormale de H engendré par $a = e_1+e_2+e_3$ et $b = e_1 - e_4$.

2. Donner la matrice dans B de la projection orthogonale sur H.

3. Calculer $d(e_1,H)$.

Exercice 6 **(CCINP PSI 2019)**

1. Montrer que $< P,Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

3. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2 - at + b)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 **(CCP PSI 2022)**

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour que $\phi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans ce cas, calculer la distance de X^n à $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. *(*)*

Exercice 8 (CCP PSI 2018)
Pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(M, N) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} n_{i,j}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose $H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} = 0 \right\}$. Calculer $d = \inf_{M \in H} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. *(*)*

Indications

Exercice 4

2. *Cauchy-Schwarz*

Exercice 7

2. *commencer par définir F à l'aide du produit scalaire et trouver un vecteur normal à F*

Exercice 8

2. *déterminer un vecteur normal à H (après avoir justifié que c'est un hyperplan)*