

**PSI2. devoir en classe n°4. 4h . Samedi 11 janvier 2025.**

Proposition de solution.

**Pb1.Centrale 2024 tsi.II.A – Cavité résonante électromagnétique****Q1.** Equations de Maxwell :

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 ; \quad \text{Maxwell - Thomson : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{Maxwell - Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans le vide, il n'y a pas de charges ni de courant ( $\rho = 0 ; \vec{j} = \vec{0}$ ) :

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = 0 ; \quad \text{Maxwell - Thomson : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{Maxwell - Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

**Q2.** On utilise la relation entre les différents opérateurs :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} (\vec{E})) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} (\vec{E})) - \Delta (\vec{E})$$

En remplaçant avec l'équation de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss, on obtient :

$$\operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \operatorname{grad} (0) - \Delta (\vec{E}) \Leftrightarrow -\frac{\partial \operatorname{rot} (\vec{B})}{\partial t} = -\Delta (\vec{E})$$

$$\frac{\partial \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}{\partial t} = \Delta (\vec{E}) \Leftrightarrow \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta (\vec{E}) \Leftrightarrow \Delta (\vec{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Cette équation est appelée équation de propagation, équation d'onde ou équation de d'Alembert.

**Q3.** La solution proposée est une O.P.P.S. : une onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement se dirigeant dans le sens des  $x$  croissants.Elle est progressive car elle est de la forme  $f(t - x/c)$  ; elle est plane car le champ appartient à un même plan perpendiculaire à la direction de propagation ; et elle est sinusoïdale car la fonction est fonction sinusoïdale comportant une seule fréquence.**Q4.** En calculant les dérivées partielles :

$$\Delta (\vec{E}) = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Soit, par projection sur  $\vec{e}_y$  :

$$-k^2 E_0 \cos(\omega t - kx) + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx) = 0 \Leftrightarrow k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

**Q5.** On applique la relation de passage pour le champ E en  $x = 0$  :

$$\vec{E}_i(x=0) - \vec{E}_{\text{cond}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Or  $\vec{E}_{\text{cond}} = \vec{0}$  car le champ est nul dans un conducteur parfait ; et  $\vec{E}_i(x=0)$  est dirigé selon  $\vec{e}_y$ , donc :

$$E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Puis par projection suivant  $\vec{e}_y$  :

$$E_0 \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow E_0 = 0 \quad \text{puisque} \quad \cos(\omega t) \neq 0 \forall t$$

En  $x = L$ , de la même façon :

$$\vec{E}_i(x=L) - \vec{E}_{\text{cond}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Par projection suivant  $\vec{e}_y$  :

$$E_0 \cos(\omega t - kL) = 0 \Rightarrow E_0 = 0 \quad \text{puisque} \quad \cos(\omega t - kL) \neq 0 \forall t$$

**Q6.** C'est une onde stationnaire : c'est le produit de deux fonctions indépendantes, l'une du temps et l'autre de l'espace.**Q7.** En  $x = 0$ , on a montré par les relations de passages et en projetant sur  $\vec{e}_y$  que  $\|\vec{E}\|$  doit être nul. Or en  $x = 0$ ,  $\|\vec{E}\| = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(k \times 0) = 0$ . Le champ vérifie la relation de passage en zéro puisqu'il est nul.**Q8.** En  $x = L$ , la norme du champ doit aussi être nulle  $\forall t$ , donc  $\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow L = n\pi/k$   
Soit, avec  $k = 2\pi/\lambda$  :

$$L = \frac{n\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

Wie Gott in Frankreich.

**Pb2.Centrale 2024 psi. II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre**

**Q16.** Ecriture comparée des forces électrique et gravitationnelle entre deux masses chargées. On en déduit :

	électrostatique	Gravitation
Forces	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{g}$
Champ	$\vec{E}$	$\vec{g}$
	Charge q	Masse m
constante	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$-4\pi G$
Relation de Gauss	$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\text{div } \vec{g} = -4\pi G\mu$

$\oiint_{P \in S} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$  devient  $\oiint_{P \in S} \vec{g}(P) \cdot d\vec{S}_P = -4\pi G M_{\text{int}}$

**Q17.** Coordonnées sphériques.

Symétries et invariances donnent : le champ de gravitation est radial et ne dépend que de r.

Comme il est attractif, je l'écris :  $\vec{g}_{T_h} = -g(r)\vec{e}_r$  avec  $g(r) \geq 0$

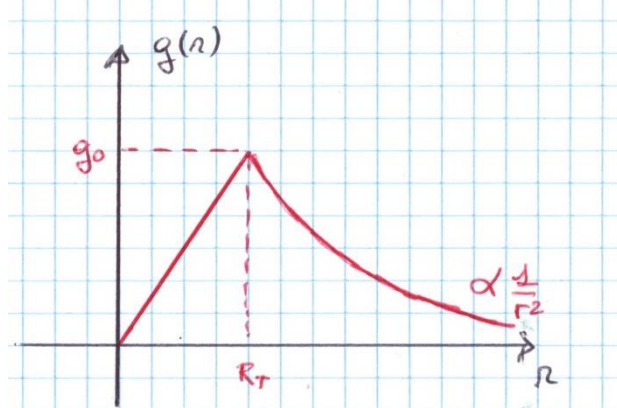
Choix de la surface de Gauss : sphère de rayon r centrée en O.

$\oiint_{P \in S} \vec{g}(P) \cdot d\vec{S}_P = -4\pi r^2 g(r)$

Si  $r > R_T$ , alors  $M_{\text{int}} = M_T$  et le théorème de Gauss donne alors :  $g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$

Si  $r < R_T$ , alors  $M_{\text{int}} = M_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^2$  et le théorème de Gauss donne alors :  $g(r) = \frac{GM_T}{R_T^3} r$

**Q18.** La norme du champ de gravitation est tout simplement  $g(r)$ . On obtient :



**Q19.**  $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9,814 \text{ SI}$

**Q20.** Le problème reste à symétrie sphérique donc l'écriture du champ de gravitation a la même forme symbolique. Si on applique le théorème de Gauss sur la surface de la Terre, la masse intérieure n'a pas changé donc le résultat est le même.

**Q21.** On utilise ici directement la relation de Gauss gravitationnelle qui donne la masse volumique en un point :

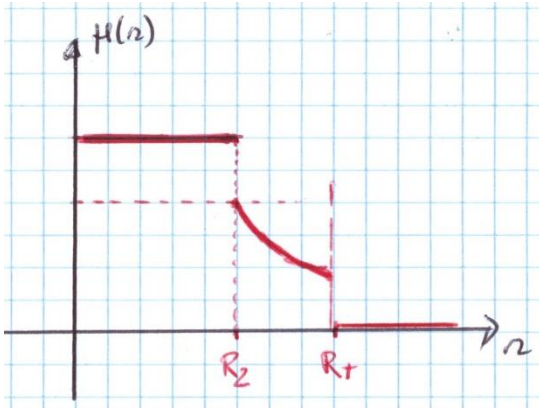
$$\mu = -\frac{1}{4\pi G} \text{div } \vec{g}$$

Pour  $r < R_2$   $\vec{g} = -g_0 \frac{r}{R_2} \vec{e}_r = -\frac{GM_T}{R_T^2} \frac{r}{R_2} \vec{e}_r$   $\text{div } \vec{g} = -\frac{3g_0}{R_2}$

$$\mu = \frac{3M_T}{4\pi R_2 R_T^2}$$

Pour  $R_2 < r < R_T$   $\vec{g} = -g_0 \vec{e}_r = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_r$   $\text{div } \vec{g} = -\frac{2g_0}{r}$

$$\mu = \frac{M_T}{2\pi R_T^2 r}$$



Les trois valeurs remarquables sont :

$$\mu(R_2^-) = \frac{3M_T}{4\pi R_2 R_T^2} \approx 10t \cdot m^{-3} \quad \mu(R_2^+) = \frac{M_T}{2\pi R_2 R_T^2} = \frac{2}{3} \mu(R_2^-) \approx 6,7t \cdot m^{-3} \quad \mu(R_T^-) = \frac{M_T}{2\pi R_T^3} = \frac{2}{3} \mu_o \approx 3,7t \cdot m^{-3}$$

### Pb3.Centrale 2021 mp.

#### III.B - Interaction champs - plasma dans la torche

Q 28. Les quatre équations, sont, dans le même ordre et sous forme intégrale :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{Gauss}$$

donc  $\oiint_{P \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = 0$

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 I(\mathcal{S}_\Gamma, t) \quad \text{Ampère}$$

donc  $\oint_{P \in \Gamma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = -\frac{d}{dt} \iint_{M \in \mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$

Ici,  $I(\mathcal{S}_\Gamma, t)$  est le courant algébriquement enlacé par le contour  $\Gamma$  sur lequel s'appuie la surface  $\mathcal{S}_\Gamma$ .

L'énoncé ne donne pas les relations mathématiques donc Gauss et Ampère supposés connus servent de références.

#### III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

QP.

a) Faire un dessin et prendre un point M. Le plan  $(M, M_x, M_y)$  est plan de symétrie pour les charges donc le champ magnétique est selon Oz et on écrit :  $\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{e}_z$ . On a invariance de la distribution de courant par translation selon Ox et Oy, donc  $\vec{B}(M) = B(x) \vec{e}_z$

Si  $x = 0$ , alors le plan  $(M, M_y, M_z)$  est aussi plan de symétrie pour les courants, donc le champ magnétique est orthogonal à Oz tout en étant selon Oz. La seule solution est  $B(0) = 0$ .

Si vous regardez votre dessin et faites une rotation de  $\pi$ , vous allez vous apercevoir que  $B(z)$  est impaire. Cela ne va pas servir dans le calcul suivant.

$$\text{b) } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ donne } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B'(x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 j_y \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } j_y = 0 \text{ ou } j_o$$

Pour  $-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}$  cela donne :  $B'(x) = -\mu_0 j_o$  qui s'intègre en

$$B(x) = -\mu_0 j_o x + \text{Cte1} = -\mu_0 j_o x \text{ car } B(0) = 0.$$

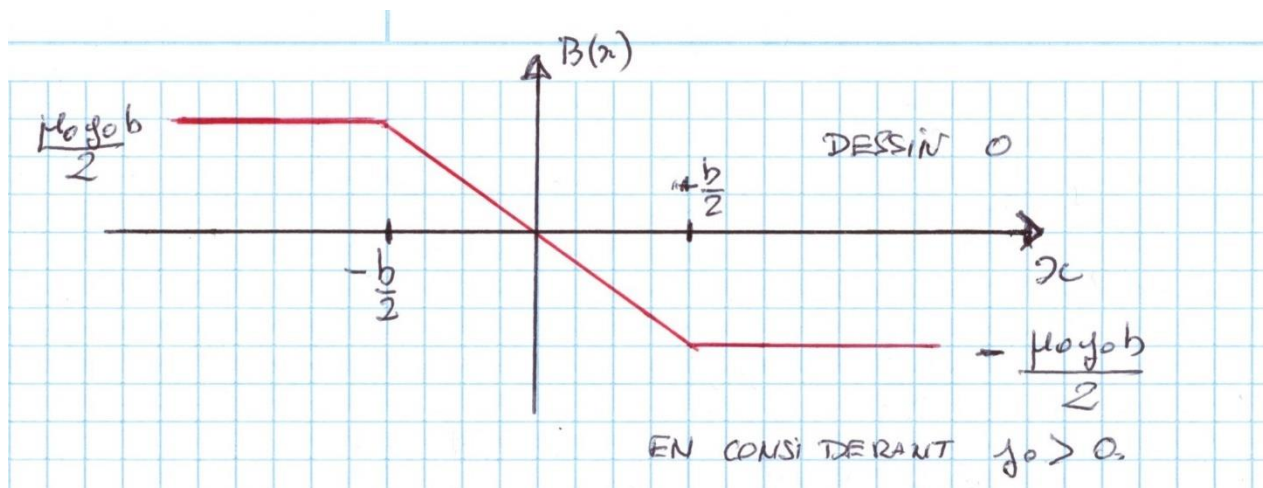
Pour  $x < -\frac{b}{2}$ , cela donne :  $B'(x) = 0$  qui s'intègre en

$$B(x) = \text{Cte2} = +\frac{\mu_0 j_o b}{2} \text{ par continuité en } x = -\frac{b}{2}$$

Pour  $x > \frac{b}{2}$ , cela donne :  $B'(x) = 0$  qui s'intègre en

$$B(x) = \text{Cte3} = -\frac{\mu_0 j_o b}{2} \text{ par continuité en } x = +\frac{b}{2}$$

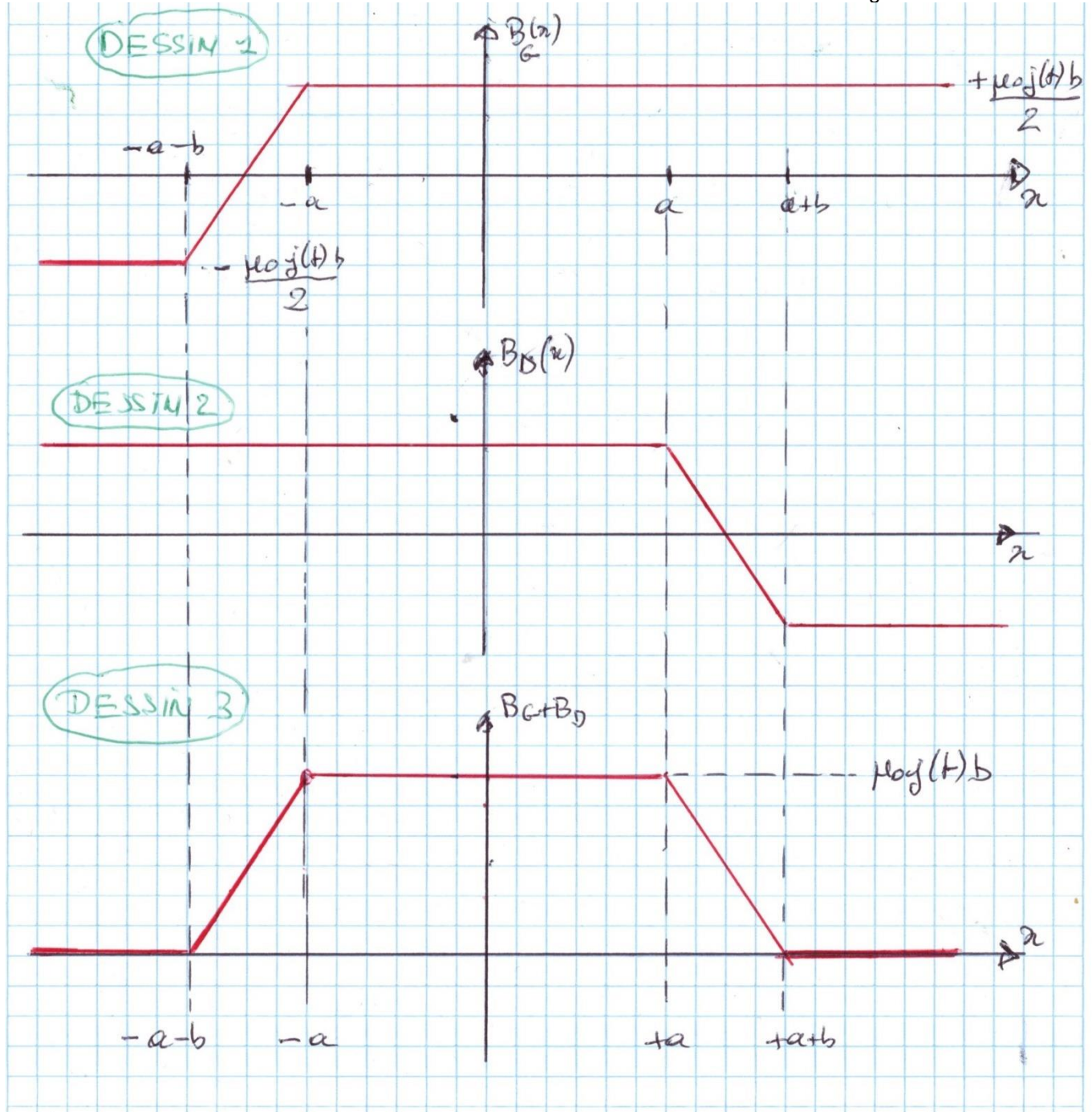
Le profil est donc le suivant :



**Q 29.** On procède à un changement de repère et on remplace  $j_o$  par  $J(t)$  dans les résultats de QP, ce qui donne :

$$B_G(x, t) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x < -a - b \\ \mu_0 \left( x + a + \frac{b}{2} \right) J(t) & \text{si } x \in [-a - b; -a] \\ \mu_0 \frac{b}{2} J(t) & \text{si } x > -a \end{cases}$$

**Q 30.** Il n'y a plus qu'à faire les dessins :



**III.B.2) Propriétés dans le plasma**

**Q 31.** Le champ magnétique dans le plasma dépend du temps donc la relation de MF implique forcément :  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$  donc  $\vec{E} \neq \vec{0}$ . Le plasma est ionisé donc il ya des charges libres qui vont se mettre en mouvement sous l'influence du champ électrique donc courant électrique dans le plasma.

En un point M du plasma, le plan (xMz) est plan d'antisymétrie pour le système. Le champ électrique est donc perpendiculaire à ce plan don selo Oy. On note  $\vec{E}(M, t) = E(x, y, z, t) \vec{e}_y$ .

Ensuite, invariance du système par translation selon Oy ou Oz. On obtient :  $\vec{E}(M, t) = E(x, t) \vec{e}_y$

Pour l'imparité, vous dessinez le champ électrique en un point M et vous faites une rotation de  $\pi$  autour de Oz. On a maintenant le point symétrique de M, le champ est dans l'autre sens mais le système de courant est le même donc  $E(x, t)$  est une fonction impaire de x.

**Q 32.** Le champ créé par les lames est à l'origine d'une distribution de courant dans le plasma ce qui induit un champ magnétique créé par le plasma. On peut donc en déduire que ce champ n'est pas le même que celui seulement créé par les lames.

Le plan  $(xMy)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants dans les lames et de la distribution de charges (nulle) dans le plasma. On en déduit donc que le champ magnétique est porté par  $\vec{e}_z$ , orthogonal au plan cité précédemment.

Les mêmes raisonnements d'invariances donnent la dépendance spatiale de  $\vec{B}$ .

Pour la parité, vous dessinez le champ magnétique en un point M et vous faites une rotation de  $\pi$  autour de Oz. On a maintenant le point symétrique de M, le champ est dans le même sens et le système de courant est le même donc  $B(x, t)$  est une fonction paire de x.

**Q 33.** L'équation de Maxwell-Ampère donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$-\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \vec{e}_y = \mu_0 j(x, t) \vec{e}_y \text{ soit, en projetant } -\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \mu_0 j(x, t) (**)$$

L'équation de Maxwell-Faraday donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \vec{e}_z = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \vec{e}_z \text{ soit, en projetant } \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$$

### III.B.3) Modèle non collisionnel

**Q 34.** On vient d'établir que:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x \partial t}$$

On en déduit donc :

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t \partial x} \text{ or, } -\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = \mu_0 j(x, t) \text{ d'où } \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu_0 j(x, t)}{\partial t} = \mu_0 \frac{ne^2}{m} E(x, t)$$

En posant  $\lambda = \sqrt{\frac{m}{n\mu_0 e^2}}$ , on obtient bien l'équation attendue.

Reste à faire l'AD.

Méthode 1 bourrine : On sait que  $[m] = M$ ,  $[n] = L^{-3}$  et  $[e] = I \times T$ .

La force de Lorentz magnétique appliquée sur une particule de charge  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  et soumise à un champ magnétique  $\vec{B}$  s'exprime :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \text{ et, d'après le théorème d'Ampère } [B]L = [\mu_0]I$$

Ainsi :

$$[\mu_0] = \frac{L[F]}{I[q][v]} = \frac{L \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}}{I^2 \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{L \cdot M}{I^2 T^2}$$

Wie Gott in Frankreich.

On en déduit donc que :

$$[\lambda] = \sqrt{\frac{M \cdot I^2 T^2}{L^{-3} \cdot L \cdot M \cdot I^2 \cdot T^2}} = L$$

$\lambda$  a la dimension d'une longueur, ce qui est cohérent au vu de l'équation différentielle donnée dans l'énoncé.

Méthode 2 :  $\lambda^2 = \frac{m}{n\mu_0 e^2}$  avec  $\mu_0$  en  $H \cdot m^{-1}$ ,  $e$  en  $C=A \cdot s$ , et  $1H = 1V \cdot s \cdot A^{-1}$  avec  $u = L \frac{di}{dt}$

On obtient :  $\lambda^2$  en  $kg \cdot m^3 \cdot (H \cdot m^{-1})^{-1} \cdot (A \cdot s)^{-2}$ , puis on remplace H :

$$\lambda^2 \text{ en } kg \cdot m^4 \cdot (A \cdot V)^{-1} \cdot s^{-3} = \frac{kg \cdot m^4 \cdot s^{-3}}{W} = \frac{kg \cdot m^4 \cdot s^{-2}}{W \cdot s} = \frac{(kg \cdot m \cdot s^{-2})m}{J} m^2 = \frac{(N)m}{J} m^2 = \frac{J}{J} m^2 = m^2$$

**Q 35.** L'équation différentielle précédente en  $x$  est du deuxième ordre. Le discriminant de l'équation caractéristique est positif, on obtient ainsi la forme générale pour  $E$  :

$$E(x, t) = \alpha'(t) \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \beta'(t) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) .$$

Puis on utilise l'imparité donc  $\beta'(t) = -\alpha'(t)$  et on sort alors :

$$E(x, t) = 2\alpha'(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

On peut aussi utiliser une autre base des solutions  $\left\{ \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right), \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\}$  et écrire

$$E(x, t) = \alpha(t) \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{or, } E(x, t) \text{ est impaire par rapport à } x: E(x, t) = \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

D'après (\*), on obtient :

$$\frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$B(x, t) = -\int_0^t \frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) dt = -\frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\lambda} \int_0^t \beta(t) dt$$

en considérant qu'il n'y a pas de champ magnétique statique (id est constante d'intégration nulle). Évaluons  $B$  en  $x = a$  :

$$B(a, t) = B_0(t) = -\frac{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{\lambda} \int_0^t \beta(t) dt \text{ on en déduit donc que } \int_0^t \beta(t) dt = -\frac{B_0(t)\lambda}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

On a donc l'expression attendue dans l'énoncé :

$$B(x, t) = \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(a/\lambda)} B_0(t)$$

Q 36. L'équation ( \* ) permet ainsi d'écrire :

$$\frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) dB_0(t)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right) dt}$$

Ainsi, on a :

$$\beta(t) = -\frac{\lambda}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt} \quad \text{d'où} \quad E(x, t) = -\frac{\lambda \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) dB_0(t)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right) dt}$$

L'équation ( \*\* ) donne :

$$\mu_0 j(x, t) = -\frac{\sinh(x/\lambda)}{\lambda \cosh(a/\lambda)} B_0(t) \quad \text{soit} \quad j(x, t) = -\frac{\mu_0 \sinh(x/\lambda)}{\lambda \cosh(a/\lambda)} B_0(t)$$

Q 37. L'expression de la puissance volumique est la suivante :

$$\mathcal{P}_V = \vec{j}(x, t) \cdot \vec{E}(x, t) = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_0(t) \frac{dB_0(t)}{dt} = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0^2(t)}{dt}$$

On en déduit donc que la moyenne sur une période T est :

$$\langle \mathcal{P}_V \rangle = \left\langle \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0^2(t)}{dt} \right\rangle = \mu_0 \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \left\langle \frac{dB_0^2(t)}{dt} \right\rangle$$

Avec

$$\left\langle \frac{dB_0^2(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dB_0^2(t)}{dt} \cdot dt = \frac{1}{T} [B_0^2(t)]_0^T = \frac{1}{T} [B_0^2(T) - B_0^2(0)] = 0$$

La puissance moyenne cédée au plasma est nulle , donc on ne transfère pas d'énergie de bobinage vers le plasma par cette méthode de clcul.



**Pb4.Extrait Mines Ponts 2024 psi.**

**Grosse coquille dans les données, sans influence ici car je n'ai pas mis les questions correspondantes. La largeur des colonnes du tableau est trop faible donc provoque un saut de ligne sur quelques données.**

**Q6.** Piège dans l'énoncé. Mais si vous relisez bien le texte, il y a « parmi ».

Plus le nombre d'oxydation de l'élément uranium dans l'espèce est élevé, plus l'espèce est oxydante et prédomine (ou existe) à potentiel élevé.

Les espèces basiques prédominent (ou existent) à pH élevé et les espèces acides à pH faible. Pour faire la répartition, calculons d'abord le nombre d'oxydation de l'élément uranium dans les différentes espèces :

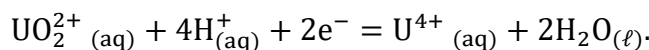
- dans  $U_{(s)}$ , n.o. (U) = 0;
- dans  $U^{3+}_{(aq)}$  et  $U(OH)_{3(s)}$ , n.o. (U) = +III;
- dans  $U^{4+}_{(aq)}$  et  $U(OH)_{4(s)}$ , n.o. (U) = +IV;
- dans  $UO_2^{2+}_{(aq)}$  et  $UO_2(OH)_{2(s)}$ , n.o. (U) = +VI.

Les hydroxydes sont les espèces basiques aux différents nombres d'oxydation, ainsi la répartition se fait selon :

n.o.	pH ↗	
+VI	<b>A</b> = $UO_2^{2+}_{(aq)}$	<b>B</b> = $UO_2(OH)_{2(s)}$
+IV	<b>C</b> = $U^{4+}_{(aq)}$	<b>D</b> = $U(OH)_{4(s)}$
+III	<b>E</b> = $U^{3+}_{(aq)}$	$U(OH)_{3(s)}$
0	<b>F</b> = $U_{(s)}$	

Le diagramme E-pH ne présente pas de frontière verticale (de pH constant) pour le nombre d'oxydation + III et il y a uniquement 6 domaines de stabilité thermodynamique sur le diagramme E-pH. L'une des espèces au nombre d'oxydation + III ne présente pas de domaine de stabilité sur la diagramme E-pH : c'est  $U(OH)_{3(s)}$  qui se dismute en  $U_{(s)}$  et  $U(OH)_{4(s)}$ .

**Q7.** Frontière A/C : c'est la frontière entre les espèces  $UO_2^{2+}_{(aq)}$  et  $U^{4+}_{(aq)}$ , la demi-équation d'oxydo-réduction du couple oxydant/réducteur est la suivante :

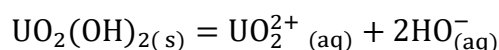


Le potentiel de Nernst du couple a donc l'expression suivante :

$$E_N(UO_2^{2+}/U^{4+}) = E^\circ(UO_2^{2+}/U^{4+}) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[UO_2^{2+}][H^+]^4}{c^{o4}[U^{4+}]} \right) = E^\circ(UO_2^{2+}/U^{4+}) - 0,12pH$$

La pente de la frontière A/C est égale à  $-0,12$  V par unité de pH .

**Q8.** La dissolution de  $UO_2(OH)_{2(s)}$  est caractérisée par la transformation chimique d'équation :



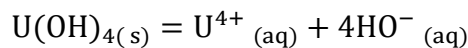
dont la constante d'équilibre thermodynamique est donnée  $K_S = 10^{-24}$ . À l'équilibre, l'égalité entre  $K_S$  et le quotient réactionnel permet d'obtenir la concentration en ions  $\text{HO}^-$  à la frontière:

$$K_S = \frac{[\text{HO}^-]^2[\text{UO}_2^{2+}]}{c^3} \text{ donc } [\text{HO}^-] = 10^{-12} \text{ mol L}$$

car  $[\text{UO}_2^{2+}] = 1,0 \text{ mol L}^{-1}$  au niveau de la frontière. D'après l'expression du produit ionique de l'eau:  $\frac{[\text{H}^+][\text{HO}^-]}{c^2} = 10^{-14}$

on en déduit la valeur numérique du pH de la frontière A/B:  $\text{pH}_{A/B} = 2,0$ .

De même on considère la dissolution de  $\text{U}(\text{OH})_{4(s)}$  :



de constante d'équilibre thermodynamique :  $K_S = 10^{-49}$  on en déduit, d'après l'égalité avec le quotient réactionnel à l'équilibre,  $\text{pOH} = 12,25$  et le pH à la frontière C/D à l'aide du produit ionique de l'eau :  $\text{pH}_{C/D} = 1,75$ .

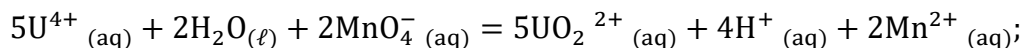
**Q9.** Les ions uranyle  $\text{UO}_2^{2+}$  sont réduits en ions  $\text{U}^{4+}$  et les ions chrome(II)  $\text{Cr}^{2+}$  sont oxydés en ions chrome(III)  $\text{Cr}^{3+}$ . Les deux espèces initiales ont des domaines de prédominance disjoints et les deux espèces formées ont des domaines de prédominance qui se recourent.

**Q10.** Les ions chrome(II)  $\text{Cr}^{2+}$  restant sont oxydés par le dioxygène  $\text{O}_2$ . En effet en superposant le diagramme potentiel- pH de l'eau avec celui du chrome on constate que les deux espèces  $\text{Cr}^{2+}$  et  $\text{O}_2$  ont des domaines de prédominance disjoints. Les espèces formées à l'issue de la réaction d'oxydo-réduction sont l'eau  $\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$  et les ions  $\text{Cr}^{3+}$  voire dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}_{(aq)}$ .

**Q11.** Lors de l'étape 3, il y a :

- oxydation des ions  $\text{U}^{4+}$ :  $\text{U}^{4+}_{(aq)} + 2\text{H}_2\text{O}_{(\ell)} = \text{UO}_2^{2+}_{(aq)} + 4\text{H}^+_{(aq)} + 2\text{e}^-$ ;
- réduction des ions permanganate :  $\text{MnO}_4^-_{(aq)} + 8\text{H}^+_{(aq)} + 5\text{e}^- = \text{Mn}^{2+}_{(aq)} + 4\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$ .

L'équation modélisant la réaction d'oxydoréduction de titrage lors de l'étape 3 est donc la suivante:



dans laquelle il y a 10 électrons échangés.

**Q12.** La constante d'équilibre thermodynamique de la réaction précédente est donnée par :

$$E(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = E(\text{UO}_2^{2+}/\text{U}^{4+}) \text{ à l'équilibre}$$

En utilisant Nernst, on fait apparaître le quotient de réaction qui est ici la constante d'équilibre. On sort alors :

$$K^\circ = 10^{\frac{10(E^\circ(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) - E^\circ(\text{UO}_2^{2+}/\text{U}^{4+}))}{0.06}} = 10^{200} \gg 1;$$

**Q13.** La calcination est un processus qui consiste à chauffer une espèce solide pour la décomposer en différentes sous-espèces. La calcination du diuranate d'ammonium  $(\text{NH}_4)_2\text{U}_2\text{O}_7$  produit du trioxyde d'uranium  $\text{UO}_3$  et de l'ammoniac  $\text{NH}_3$ , on peut proposer l'équation suivante qui modélise la calcination :  $(\text{NH}_4)_2\text{U}_2\text{O}_7(s) = 2\text{UO}_3(s) + 2\text{NH}_3(g) + \text{H}_2\text{O}(g)$ .