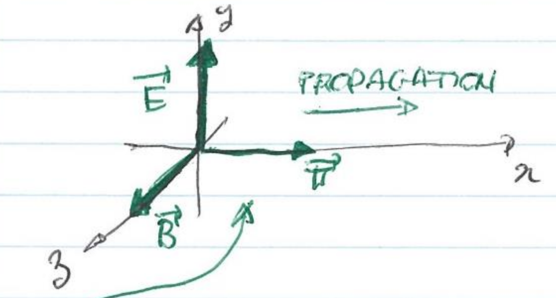
$\boxed{\text{EXER A}}$ $\vec{E}\left(E_x=0,\ E_y=E_0\cos(\omega t-kx),\ E_z=0\right)$

(A1) $\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0+0+0=0$ / OK

(A2) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\ E_y(x,t)\\ 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0\\ 0\\ \frac{\partial}{\partial x}E_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ 0\\ kE_0\sin(\omega t-kx)\end{vmatrix}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

INTEGRATION PAR RAPPORT AU TEMPS : $\vec{B}=\boxed{\begin{vmatrix}K_1(M)\\ K_2(M)\\ +\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t-kx)+K_3(M)\end{vmatrix}}$

CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE NON COMPTÉ.

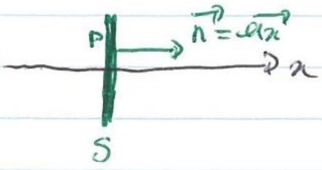


(A3) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow k^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}\xrightarrow[\text{LES } x \text{ CROISSANTS } k>0]{\text{ÉNONCÉ : PROPAGATION SELON}}\boxed{k=\dfrac{\omega}{c}}$

(A4) (a) $\vec{\Pi}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=\dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t-kx)\,\vec{u}_x$ $\qquad\langle\vec{\Pi}\rangle=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u}_x$

$u_{em}=\varepsilon_0\dfrac{E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}=\varepsilon_0E_0^2\cos^2(\omega t-kx)\Rightarrow\langle u_{em}\rangle=\dfrac{\varepsilon_0E_0^2}{2}$

(b) $P_m=\left\langle\iint_{P\in S}\vec{\Pi}\cdot\vec{n}\,dS\right\rangle=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0c}\cdot S$



(c) $\Phi=\dfrac{P_m}{S}=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0c}=\left(\dfrac{\varepsilon_0E_0^2}{2}\right)c=\langle u_{em}\rangle c$

$\mu_0\varepsilon_0c^2=1$

$\boxed{\text{INTER}}$: c EST LA VITESSE DE PROPAGATION DE L'ÉNERGIE

EXER B

(a) $c = 3 \cdot 10^8 \, m \cdot s^{-1}$

LONGUEUR D'ONDE $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ d'où $f = \frac{c}{\lambda}$

$\hookrightarrow$ f compris entre $f_{min} = 3{,}8 \cdot 10^{14}$ Hz et $f_{max} = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz

ORDRE DE GRANDEUR 10^{14} Hz.

(b) $P = \frac{dE}{dt} = 1 \, mW = 10^{-3} \, J \cdot s^{-1}$

$\hookrightarrow$ $P = \left(\frac{dn}{dt}\right) \cdot h\nu$

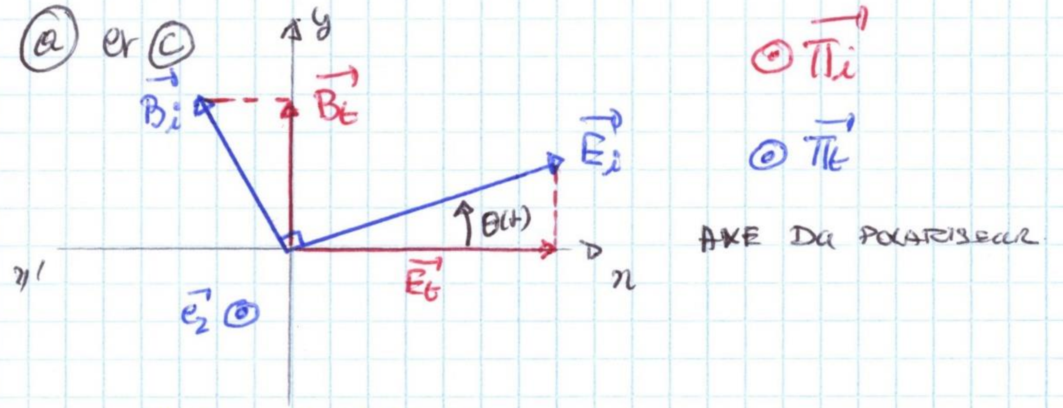
$\hookrightarrow$ NBRE DE PHOTONS EMIS PAR UNITÉ DE TEMPS

$\hookrightarrow$ $\left(\frac{dn}{dt}\right) = \frac{1}{h\nu} \cdot P \simeq 3 \cdot 10^{11} \, s^{-1}$

300 MILLIARDS DE PHOTONS EMIS PAR SECONDE.

EXRCICE C.

(a) et (c)



ONDE INCIDENTE

ONDE TRANSMISE

$$\vec{\Pi_i} = \frac{\vec{E_i} \wedge \vec{B_i}}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E_i}\| . \|\vec{B_i}\|}{\mu_0} \vec{e_z} = \Pi_i \vec{e_z}$$

$$\vec{\Pi_t} = \frac{\vec{E_t} \wedge \vec{B_t}}{\mu_0} = \frac{\|\vec{E_t}\| . \|\vec{B_t}\|}{\mu_0} \vec{e_z} = \frac{\|E_i\| \, \|B_i\| \cos^2\theta}{\mu_0} \vec{e_z} = \Pi_t \vec{e_z}$$

$$= \Pi_i . \left[\cos^2\theta(t)\right] \vec{e_z}$$

SI $\theta(t)$ EST UNE CONSTANTE.

$$\langle \Pi_t \rangle = \langle \Pi_i \cos^2\theta \rangle = \langle \Pi_i \rangle . \cos^2\theta$$

(PUISSANCE MOYENNE TRANSMISE) = (PUISSANCE MOYENNE INCIDENTE) $\times \cos^2\theta$

(b) DANS CE CAS, IL FAUT MOYENNER $\cos^2\theta$, avec θ ALEATOIRE, DONC $\langle \cos^2\theta \rangle = \frac{1}{2}$

(PUISSANCE MOYENNE TRANSMISE) $= \dfrac{1}{2}$ (PUISSANCE MOYENNE INCIDENTE)

EXER D (a)

$$\vec{E} = \underbrace{\overbrace{E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{e_x}}^{\vec{E_1}}}_{\substack{\text{OPPH 1}\\ \vec{k_1} = k\vec{e_z}}} + \underbrace{\overbrace{\alpha E_0\, e^{j(\omega t + kz)}\,\vec{e_x}}^{\vec{E_2}}}_{\substack{\text{OPPH 2}\\ \vec{k_2} = -k\vec{e_z}}}$$

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{B_1}}_{\frac{\vec{k_1}}{\omega}\wedge\vec{E_1}} + \underbrace{\vec{B_2}}_{\frac{\vec{k_2}}{\omega}\wedge\vec{E_2}}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\left\{ e^{j(\omega t - kz)} - e^{j(\omega t + kz)} \right\}\vec{e_y}$$

ATTENTION

(b) POUR CALCULER $\vec{\Pi}$, PASSAGE EN REEL OBLIGATOIRE

$$\vec{E}' = E_0\,\vec{e_x}\left(\cos(\omega t - kz) + \alpha\cos(\omega t + kz)\right)$$

$$\vec{B}' = \frac{E_0}{c}\,\vec{e_y}\left(\cos(\omega t - kz) - \alpha\cos(\omega t + kz)\right)$$

$$\hookrightarrow \vec{\Pi} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\vec{e_z}\left[\cos^2(\omega t - kz) - \alpha^2\cos^2(\omega t + kz)\right]$$

$$\hookrightarrow \boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\left(1 - \alpha^2\right)\vec{e_z}}$$

$\alpha < 1$ ENERGIE $\longrightarrow$.

$\alpha > 1$ ENERGIE $\longleftarrow$

$\alpha = 1$ ONDE STATIONNAIRE

PAS DE PROPAGATION D'ENERGIE

E)Onde em dans un câble coaxial.

a)On obtient : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0$*. L'exponentielle sort de la dérivée et se simplifie car elle n'est jamais nulle. On peut aussi simplifier par r non nul. La dérivée devient alors une dérivée droite :*

$$\frac{d}{dr}(rE(r)) = 0 \quad ce\ qui\ donne\ rE(r) = Cte = E_oR_1\ avec\ la\ CL\ fournie$$

b)On utilise ici l'équation de Maxwell-Faraday, qu'on intègre par rapport au temps. Il apparaît alors une fonction quelconque de l'espace, soit donc un champ magnétostatique. Ce champ n'est absolument pas lié à l'onde et on peut donc l'ignorer compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell.

On aurait pû aller plus vite en considérant que la dérivée temporelle revient à multiplier par $j\omega$*.*

On obtient : $\vec{B} = \frac{k}{\omega}.\frac{E_oR_1}{r}.e^{j(\omega t-kz)}\vec{u}_\theta$*.*

c)On reporte les formes obtenues dans la relation MA. On sort alors $k = \frac{\omega}{c}$ *si on remarque que ces trois grandeurs sont imposées positives.*

d)Localement, l'onde a la même structure que l'onde plane.

e)$\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_o} = \frac{k}{\mu_o\omega}\left(\frac{E_oR_1}{r}\right)^2.cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z$ ***après être revenu en notation réelle.***

La puissance moyenne transportée est la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble entre r=R_1 *et r=*R_2*.*

La puissance surfacique est une fonction de la position donc on est obligé d'intégrer sur la section droite. Une couronne circulaire de rayon r, d'épaisseur dr a une surface $2\pi rdr$

L'élément de surface élémentaire est $\overrightarrow{dS} = 2\pi rdr\vec{u}_z$ *, on intègre de r=*R_1 *à r=*R_2 *et on fait la moyenne temporelle.*

On obtient : $P = \frac{\pi R_1^2E_o^2}{\mu_o c}Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$*.*

(F)

L'ECRITURE D'UNE OPPH EST EN $\cos(\omega t - \underbrace{\vec{k}\cdot\vec{OM}}_{k_x . x + k_y . y + k_z . z})$

$$\Rightarrow \vec{k} = \frac{k}{5}\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\vec{k}\| = k.$$

POUR QUE L'ONDE SOIT PLANE, IL FAUT MAINTENANT $\underline{\vec{E_0} \perp \vec{k}}$

LE VECTEUR UNITAIRE DE PROPAGATION EST :

$$\vec{u_k} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}$$

LE CHAMP MAGNETIQUE $\vec{B}$ EST DONNÉ PAR : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

NON CALCULABLE ICI.

(G)

(1) $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

OPPH+ $\vec{k_+} = k\vec{u_x}$ selon x ↗ OPPH− $\vec{k_-} = -k\vec{u_x}$ selon x ↘ $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

LES DEUX OPPH VIENNENT DES RÉFLEXIONS SUR LES DEUX MIROIRS.

OPPH+ en $x = L^-$ DEVIENT OPPH−

OPPH− en $x = 0^+$ DEVIENT OPPH+.

A PRIORI, LE NOMBRE DE RÉFLEXIONS EST INFINI

ONDE 1 OPPH+ : $\vec{B_1} = \frac{\vec{k_+}}{\omega} \wedge \underline{E_1} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_y}$

ONDE 2 OPPH− : $\vec{B_2} = \frac{\vec{k_-}}{\omega} \wedge \underline{E_2} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\underline{E_1} e^{j(\omega t - kx)} - \underline{E_2} e^{j(\omega t + kx)}\right]\vec{u_3}}$$

ATTENTION

(2) ENONCÉ $\Rightarrow$ $\vec{E}(x=0) = \vec{E}(x=L) = \vec{0}$

(3) exp $\neq 0$ $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \underline{E_1} + \underline{E_2} = 0 \\ \underline{E_1} e^{-jkL} + \underline{E_2} e^{jkL} = 0 \end{cases}$$

SOLUTION ÉVIDENTE : $(0, 0)$

ON CHERCHE UNE SOLUTION NON NULLE $\Rightarrow$ $\boxed{\sin(kL) = 0}$
(ON REMPLACE $\underline{E_1}$ OU $\underline{E_2}$)

$\boxed{kL = n\pi}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$$\omega_n = n\left(\frac{\pi c}{L}\right) \quad \left(\frac{\pi c}{L} = \omega_1\right)$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

ON RETROUVE LA CORDE DE GUITARE...

(4) $\underline{\vec{E}} = \underline{E_2} e^{j\omega_n t} \cdot \left(e^{jk_n x} - e^{-jk_n x}\right)\vec{u_y} = \boxed{2j\underline{E_2}} \sin(k_n x) e^{j(\omega_n t)} \vec{u_y}$

$\hookrightarrow E_0 e^{j\varphi_0}$

$$\boxed{\vec{E} = Re(\underline{\vec{E}}) = E_0 \sin(k_n x) . \cos(\omega_n t + \varphi_0) \vec{u_y}}$$

x : $0 \longrightarrow L$

$k_n x$: $0 \longrightarrow n\pi$

$\boxed{(n+1) \text{ ZÉROS DE } \sin(k_n x)}$

(5)

UNE SOMME DE SOLUTIONS EST SOLUTION DONC PLUSIEURS MODES PEUVENT COEXISTER.

(n+1) NOEUDS, n VENTRES

(5) PERTES SUR LES MIROIRS, OU DANS LE MILIEU RÉEL $\Rightarrow$ L'ONDE VA DISPARAÎTRE DONC ON DOIT PRÉVOIR UNE SOURCE D'ALIMENTATION.

(6) $\boxed{\text{LASER}}$

H. Découpe laser.

1a)

Onde plane : les surfaces d'ondes (ensemble de points vibrant en phase) sont des plans, ici z=cte.

1b)Comme l'onde est une OPPH dans le vide, on a ici : $k = \frac{\omega}{c}$. On peut aussi utiliser la formule habituelle pour calculer le champ magnétique et on obtient :

$$\vec{B}(z,t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}(z,t) = \frac{E_o}{c}.cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$$

1c)

Le vecteur de Poynting est $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_o} = \frac{E_o^2}{\mu_o c}.cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z$

dont la valeur moyenne temporelle est : $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_o^2}{2\mu_o c}.\vec{u}_z$

1d)Le vecteur de Poynting mesure la puissance surface de l'onde. On a :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_o^2}{2\mu_o c}.\vec{u}_z = \frac{P}{s}\vec{u}_z$$

Ce qui permet de calculer : $E_o = \sqrt{\frac{2\mu_o cP}{s}} \approx 435\ V.m^{-1}$

2a)A pression constante, le changement d'état se fait à température constante.

2b)Pour faire fondre la masse dm, il faut :

α)faire passer sa température de T_o à T_f ,

soit fournir la chaleur $\delta Q_\alpha = dH = (Ddm)(T_f - T_o)$

β)faire le changement d'état à $T=T_f$,

soir fournir la chaleur $\delta Q_\beta = L_f dm$

Le Laser fournit l'énergie Pdt.

La masse dm pouvant foudre pendant l'intervalle de temps dt vérifie donc $Pdt = \delta Q_\alpha + \delta Q_\beta$

On obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P}{C(T_f - T_o) + L_f}$$

2c)Notons $D = \sqrt{\frac{4s}{\pi}} \approx 0{,}87\ mm$ le diamètre du faisceau laser. Si il avance à la vitesse v_L, il parcoure la distance $v_L dt$ pendant dt et il fait fondre alors la masse $dm=\mu D.e.v_L dt$

On égalise les deux expressions de dm/dt et on obtient :

$$v_L = \frac{P}{[C(T_f - T_o) + L_f]eD\mu} \approx 1{,}5\ cm \cdot s^{-1}$$

J. La voile solaire.

0 et 1)A la distance r, la puissance surfacique du rayonnement solaire est $\Pi(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$ $en\ W.m^{-2}$.

En réflexion totale, la pression de radiation est : $P_{rad}(r) = \frac{2\Pi(r)}{c}$ $en\ N.m^{-2} = Pa$

Remarque : si on connaît pas l'expression de la pression de radiation, on peut passer par une AD, mais on n'aura pas le facteur 2.

Dans le référentiel héliocentrique, en adoptant les coordonnées sphériques et en supposant la voile bien orientée, le vaisseau subit :

la force de gravitation $\vec{F}_G = -\frac{GM_S m}{r^2}\vec{e}_r$

la force de pression de radiation $\vec{F}_{rad} = +P_{rad}(r)S\vec{e}_r = \frac{PS}{2\pi c r^2}\vec{e}_r$

Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_{rad} = \left(\frac{PS}{2\pi c} - GM_S m\right)\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \alpha\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Le vaiseau est initialement immobile et la force est radiale. Le mouvement sera donc uniquement radial et donc $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r$. La projection sur $\vec{e}_r$ va donner :

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{r^2}$$

On ne connaît pas la valeur de S donc on ne peut pas calculer α.

2)L'AD montre que α est en :

$$m^3.s^{-2} = (UA)^3.an^{-2}.\left(\frac{m}{UA}\right)^3.\left(\frac{s}{an}\right)^{-2} \approx (UA)^3.an^{-2}\left(\frac{1}{1{,}5.10^{11}}\right)^3.\left(\frac{1}{86400*365{,}24}\right)^{-2}$$

On calcule alors : $\alpha = 29{,}5\ (UA)^3.an^{-2}$

3)En multipliant par $\dot{r}$ (facteur intégrant), la relation devient intégrable et on obtient :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{\alpha}{r} + Cte \xrightarrow{CI} \alpha\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right)$$

r est une fonction croissante du temps et la vitesse tend vers une constante : $v_{lim} = \sqrt{\frac{2\alpha}{d}}$

AN: $v_{lim} \approx 36\ km.s^{-1} \quad ou \quad 7{,}7\frac{UA}{an} \quad ou \quad 1\ heurelumière/an$

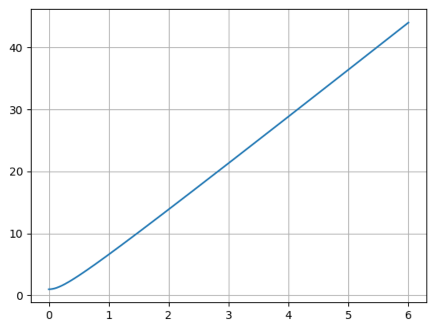
4)Si on néglige le régime transitoire (approche numérique nécessaire), il faudra bien 4 ans pour atteindre l'orbite de Neptune.

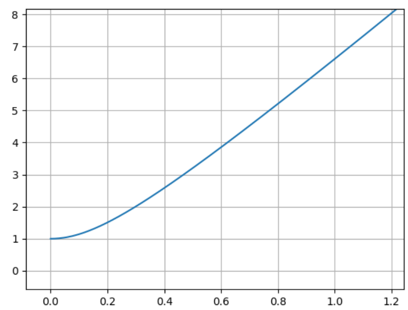
On complète alors :

16 ans pour atteindre le frontière du système solaire

50000 ans pour atteindre Proxima du Centaure.

Pour l'approche numérique, il faut évidemment travailler en UA et an pour ne pas avoir de problème avec les puissances de 10. On obtient numériquement :





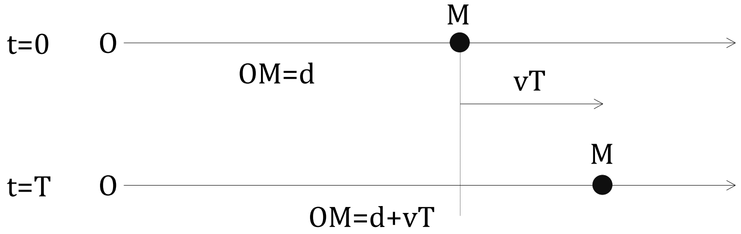
4,16 ans pour atteindre Nepture. Le régime transitoire dure environ 4 mois.

Wie Gott in Frankreich

Effet Doppler.

Doppler1.

1a)



A l'instant t=0, M envoit l'impulsion n°1. Celle-ci va parcourir la distance d à la vitesse c pour atteindre O. L'impulsion arrive en $t_1 = 0 + \frac{d}{c}$.

A l'instant t=T, M envoit la seconde impulsion mais celle-ci doit maintenant parcourir (d+vt) et va donc arriver en O à l'instant $t_2 = T + \frac{d+vT}{c}$.

L'intervalle de temps entre deux arrivées successives est donc $T' = t_2 - t_1 = T\left(1 + \frac{v}{c}\right)$

La relation avec les fréquences est donc :

$$f' = \frac{f}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

1b)Le calcul précédent reste valable en considérant v algébrique.

Si M s'éloigne, v>0 et T'>T.

Si M se rapproche, v<0 et T'<T.

1c)Effet Doppler.

2)Plus compliqué.

Pour l'impulsion n°1, on note τ la durée du trajet jusqu'au mobile. On a donc :

$$d + v\tau = c\tau \quad donc \quad \tau = \frac{d}{c - v}$$

L'impulsion arrive sur le mobile à l'instant : $t_1 = 0 + \tau = \tau$

Pour l'impulsion n°2, on note τ' la durée du trajet jusqu'au mobile. On a donc :

$$d + vT + v\tau = c\tau' \quad donc \quad \tau' = \frac{d + vT}{c - v}$$

L'impulsion arrive sur le mobile à l'instant : $t_2 = T + \tau'$

La période mesurée par le moibile est donc :

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{T}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

La relation avec les fréquences est donc :

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

3)On applique les résultats des deux questions précédentes :

On applique d'abord le résultat de la question 2 pour l'onde émise par le radar. Le mobile voit une fréquence :

$$f' = f_o\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

On applique maintenat le résultat de la question 1 pour l'onde réflécie par le mobile :

$$f'' = \frac{f'}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = f_o\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

On a bien entendu $v \ll c$, on peut fair un DL à l'ordre en v/c ce qui donne :

$$f'' \approx f_o\left(1 - 2\frac{v}{c}\right)$$

4)Le radiologue veut voir les fluides mobiles à l'intérieur de votre corps, par exemple les artères pour évaluer leur diamètre.

<u>Doppler2, en liaison avec l'exercice 1.</u>

a et b)Du fait de l'effet Döppler, la longueur d'onde de la lumière mesurée sur Terre nous semble plus élevée. Si une étoile émet principalement dans l'UV, nous la verrons d'abord dans le visible puis dans l'infrarouge si elle est très loin... Pour les étoiles visibles par l'œil, on parle d'un décalage vers les grandes longueurs d'ondes du spectre visible donc vers le rouge. En anglais, cela donne **redshift**.

c)Simple DL à l'ordre 1 en v/c_o.

On mesure $\lambda'\approx 580$nm. On en déduit alors $z\approx 3{,}8$ puis $v\approx 0{,}77c_o$. En appliquant la loi de Hubble, ce quasar serait à une distance de 10 milliards d'années lumière. On hésite à donner ce dernier chiffre peu sûr et on donne maintenant la valeur de z beaucoup plus précise; il suffit de reconnaître dans le spectre de l'objet étudié des raies connues mais décalées. Le décalage donne directement la valeur de z et la vitesse d'éloignement de l'objet par rapport à nous .

<u>Doppler3. Mesure du décalage spectral.</u>

Après multiplication, on obtient la somme deux sinusoïdes de fréquences $|\Delta f|$ et $(2f + \Delta f) \gg |\Delta f|$. Il suffit de placer maintenant un passe-bas laissant passer la BF à $|\Delta f|$ et éliminant la HF à $(2f + \Delta f)$. On met finalement un fréquencemètre gradué en vitesse.