

I Rayons de convergence

Exercice 1 [Solution]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum nx^{n^2} \quad ; \quad \sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n \quad ; \quad \sum \frac{(1+2i)^n - (2i)^n}{n(n+1)} x^n$$

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$?

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

- Définir le rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.
- Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
- Déterminer le rayon de convergence de $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

Exercice 5 (CCP PSI 2022) [Solution]

On note $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

- Prouver l'existence de a_n .
- Montrer que $a_n \sim \frac{1}{n}$.
- Déterminer le domaine de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Exercice 6 (Règle de Cauchy) [Solution]

Soit (a_n) une suite complexe telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
indication : utiliser la définition de limite avec ε .

Exercice 7 (CCP PSI 2016) [Solution]

- Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{n+1}$.
indication : vérifier que $1+t^2 \geq 2t$.
- Rayon de convergence et domaine de définition de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$?

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $a_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^n)}$

- Déterminer un équivalent de a_n .
indication : poser $u = t^n$
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$. Y a-t-il convergence en $\pm R$?
- Exprimer a_n à l'aide de la somme d'une série

Exercice 9 [Solution]

Soit (a_n) une suite complexe telle que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} S_k$.

Montrer que les rayons de convergence de $\sum S_n z^n$ et $\sum T_n z^n$ valent 1.

indication : montrer que $1 = R_a \leq R_S \leq R_T$ et puis, exprimer S_n et fonction de T_n puis a_n en fonction de S_n .

Exercice 10 (Centrale PSI 2009) [Solution]

On suppose $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$; donner le rayon de convergence de $\sum a_n P(n) z^n$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

II Calculs de sommes

Exercice 11 (CCP PSI 2014) [Solution]

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{3n}{n+2} x^n$.

Exercice 12 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Domaine de définition et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n+2} x^n$.

Exercice 13 (CCP PSI 2018) [Solution]

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 14 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta) x^k$.

1. Montrer par l'absurde que $u_k = \sin(k\theta)$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série de définition de $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.

Exercice 15 [Solution]

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt x^n$; $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $\sum_{n \geq 0} x^{E(\sqrt{n})}$?

Exercice 16 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. Déterminer a, b, c tels que $f(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}$ et déterminer une primitive de f .
2. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 17 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < R$.
3. Calculer $f(R)$.

Exercice 18 (ENSAM PSI 2007) [Solution]

Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$. Exprimer la somme à l'aide de fonctions usuelles et étudier le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 19 (CCP PSI 2010) [Solution]

Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{1+2+\dots+n}$.

Exercice 20 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Domaine de définition et somme de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 21 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]

Étude de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt \right) x^n$. (domaine de définition et l'exprimer avec des fonctions usuelles)

indication : calculer $a_n + a_{n+2}$.

Exercice 22 (CCINP PSI 2021) [Solution]

- Définir le rayon de convergence d'une série entière puis déterminer celui de $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ avec $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
- Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}$.
- Déterminer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$ puis la valeur de $S(-1)$.

Exercice 23 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$; (calculer $\int_0^1 t^n (1-t)^n dt$).

Exercice 24 (Mines-Ponts PSI 2011) [Solution]

- Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, où $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Faire l'étude en $\pm R$ puis calculer la somme pour $|x| < R$ (remarquer que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$).

Exercice 25 (ENSEA PC 2007) [Solution]

Rayon de convergence et calcul de $\sum \sin(n)x^n$.

Exercice 26 (CCP PC 2009) [Solution]

- Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?
- On pose $t_n = \text{Tr}(A^n)$; exprimer t_{n+3} en fonction de t_{n+2} , t_{n+1} et t_n .
- Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum t_n x^n$.

Exercice 27 (Centrale PSI 2014) [Solution]

- Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = 1$ admet une unique solution x_n sur \mathbb{R}^+ .
- Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
indication : montrer que $x_n \in [0, 3/4]$ et utiliser la convergence normale de la série entière sur ce segment.

III Calculs de séries numériques

Exercice 28 (CCP PSI 2016) [Solution]

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$.

Exercice 29 [Solution]

Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 30 (CCINP PSI 2021) [Solution]

- Montrer, lorsque toutes les quantités existent que $\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2 a}$
- Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$
- Montrer que $\left| \pi - 8 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{2}-1)^{2k+1} \right| \leq \frac{8}{2n+3}$

Exercice 31 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

- Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$
- Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 32 [Solution]

Soient $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. Montrer la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

indication : reconnaître $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ puis le DSE de f^2 sur $[0, 1[$ et prendre la limite en 1 (on peut ?)

Exercice 33 (ENSAM PSI 2014) [Solution]

1. Soit $a \in]0, \pi[$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(na)}{n} x^n$ converge pour $x \in]-1, 1[$ et expliciter sa somme $f(x)$ (dériver).
2. Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^N \frac{\sin(na)}{n} x^n = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(ka) x^k$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}$. ((S_n) est bornée indépendamment de $x \in [0, 1]$)

IV Calculs de sommes par équations différentielles

Exercice 34 (CCINP PSI 2023) [Solution]

On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
2. On pose $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.
Donner une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients non constants vérifiée par f .
3. Rappeler l'expression de \arcsin' puis résoudre l'équation différentielle. En déduire une expression simplifiée de la fonction f .

Exercice 35 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer les x pour lesquels $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge.
2. On note S la somme de cette série. Montrer que S est solution de $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ en fonction de S et déterminer S .

Exercice 36 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

1. Donner les variations de la suite définie par $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.
2. Calculer $\lim w_n$ et montrer que $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
3. Déterminer le rayon de convergence et la somme S de $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$. Calculer $\sum_{n \geq 0} (-1)^n w_n x^n$.

Exercice 37 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$.

1. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et f sa somme.
 - a) Montrer que $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$ et déterminer R .
 - b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle et résoudre cette équation.

Exercice 38 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $(\mathcal{E}) : x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ et f une solution de (\mathcal{E}) DSE sur $]-r, r[$ telle que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ si $|x| < r$.

1. Justifier que f est \mathcal{C}^2 sur $]-r, r[$ et écrire f' et f'' sous forme de séries entières.

2. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.
3. Déterminer a_0 et une relation entre a_n et a_{n-1} .
4. En déduire une expression simple de f .

V DSE sans équations différentielles

Exercice 39 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

Développer en série entière la fonction f définie par : $f(s) = \frac{s}{2-s^2}$.

Exercice 40 [Solution]

Développer en série entière les fonctions $f_1(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ et $f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Exercice 41 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

1. Donner le domaine de définition de $f(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$
2. f est-elle DSE au voisinage de 0? Quel est le rayon de convergence?
3. Calculer $f(1)$ et étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 42 (ENSEA-EIVP PC 2014) [Solution]

DSE de $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3} dt$.

Exercice 43 (Mines-Télécom série 2 PSI 2022) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$
2. Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles
3. Déterminer le développement en série entière de F .
4. Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 44 (Mines-Ponts MP 2011) [Solution]

DSE de $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ et rayon de convergence?

Exercice 45 (CCP MP 2015) [Solution]

DSE de $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 46 (Centrale PC 2011) [Solution]

Donner le DSE de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 47 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Développer $f(x) = \frac{x \operatorname{sh}(\alpha)}{x^2 - 2x \operatorname{ch}(\alpha) + 1}$ en série entière.

Exercice 48 (CCP PSI 2010) [Solution]

1. Montrer que f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $\frac{1}{f}$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 49 (CCP PSI 2012) [Solution]

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et expliciter la valeur de sa dérivée d'ordre n en 0.

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2011) [Solution]

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$. En écrivant $f(x)g(x) = 1$ avec $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, montrer que f est DSE et que son rayon de convergence R vérifie $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq R \leq \pi$.

Exercice 51 (EIVP PSI 2016) [Solution]

- Déterminer le DSE de $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire celui de $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n 4^{-k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

VI DSE par équation différentielle

Exercice 52 [Solution]

Soit $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

- Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]0, 1[$. Déterminer a_n et le rayon de convergence R . (*indication : éq diff*)
- Étudier la nature de $\sum (-1)^n a_n R^n$ et $\sum a_n R^n$.

Exercice 53 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

- Sur quel domaine f est-elle \mathcal{C}^1 ? Calculer $f'(x)$ et trouver a, b et c polynômiales telles que $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.
- f est-elle DSE?
- Déterminer les coefficients du DSE de f .
indication : on peut remarquer que f est impaire (pour simplifier les calculs)

Exercice 54 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = (\arcsin x)^2$.

- Montrer que f est DSE sur $] -1, 1[$
- Montrer que f' est solution sur $] -1, 1[$ de $(1-x^2)y' - xy = 1$
- Déterminer les coefficients du DSE de f
indication : pour simplifier les calculs, remarquer que f' est impaire

Exercice 55 (Centrale PSI 2011) [Solution]

Montrer que $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\arcsin(x)}{3}\right)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et déterminer le DSE de f .

Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soient $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \geq 1$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} x^n$

- Déterminer le rayon de convergence de cette série entière
- Montrer que $f'(x) - f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$
- En déduire une autre expression de f
- Montrer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} = e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!}$

Exercice 57 (Centrale PSI 2015) [Solution]

Soient $\lambda \in] -1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R} telle que $f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$.

- Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Déterminer les solutions DSE de cette équation.
- Montrer que f est DSE.
indication : montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, il existe C (dépendant de x) telle que $|t| \leq |x| \Rightarrow |f^{(p)}(t)| \leq C(1 + |\alpha|)^p$.

Exercice 58 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $S_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\gamma x) \text{ et } f(0) = \alpha\}$

- Déterminer S_α pour $\gamma = 1$ puis $\gamma = -1$.
- Soit $f(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$. Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$ et montrer que $f \in S_\alpha$
- Déterminer S_α
indication : montrer que si $f \in S_\alpha$ alors f est DSE en trouvant la valeur de $f^{(n)}$ en fonction de f

Exercice 59 (Mines-Télécom PSI 2016) [Solution]

Déterminer les séries entières solutions de $x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$ et déterminer leurs sommes.

VII Études de fonctions DSE

Exercice 60 (CCINP PSI 2019) [Solution]

Soit $I = [0, 1]$

- Montrer que $\forall x \in I, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge simplement sur I .
- Déterminer sa somme S .
- Y a-t-il convergence uniforme sur I ?

Exercice 61 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

- Déterminer le domaine de définition de F .
- Montrer que si $x \in]-1, 1[$ alors $F(x) = -S(x)$
- Montrer que si $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = \ln(x) \ln(1-x) - \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 62 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

- Donner le domaine de définition D de f
- Montrer que f est dérivable sur D
- Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 ; on pourra faire une comparaison série/intégrale et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 63 (ENTPE-EIVP MP 2009) [Solution]

- Domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$?
- Montrer qu'au voisinage de 1, on a $f(x) \sim \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$. (on pourra étudier $g(x) = (1-x)f(x)$.)

Exercice 64 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

- Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n (\ln n) z^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^n$?
- On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.
- Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \rightarrow 1^-$. On pensera à un produit de Cauchy de séries entières.

Exercice 65 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n dt$

1. Justifier l'existence de I_n et préciser son signe
2. Étudier les variations de (I_n) , puis sa convergence et sa limite
3. Par IPP, montrer que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$ et en déduire $I_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$.
4. On pose $g(x) = \sum_{n \geq 0} I_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de g
5. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale pour $|x| < 1$
6. Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 1^- .

indication : considérer $\sum \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n} \right) x^n$ et sa limite quand x tend vers 1.

Exercice 66 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum a_n$ soit absolument convergente. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, puis calculer sa valeur.
2. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} t^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} t^n$ ont un rayon de convergence infini.
3. On pose pour tout réel t , $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} t^n$.
 - a) Montrer que f et g sont dérivables et vérifient $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = g'(t) - g(t)$
 - b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t f(u) e^{-u} du = e^{-t}(g(t) - f(t))$.
4. Montrer que $\int_0^t f(u) e^{-u} du \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} A$.

Exercice 67 (Centrale PSI 2021) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(t)}{t^2} dt$

1. Justifier l'existence de a_n . Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ et le domaine de définition de sa somme S .
2. S est-elle continue en -1 .
3. Déterminer un équivalent de S en 1.
indication : commencer par chercher un équivalent de a_n

Exercice 68 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soient $\alpha > 0$ et $(\mathcal{E}) : xy' + \alpha y - xy^2 = \alpha$

1. Montrer que (\mathcal{E}) admet une unique solution φ développable en série entière sur $] -1, 1[$
2. Montrer que $\varphi(x) \underset{1}{=} O\left(\frac{1}{1-x}\right)$
3. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.
 - a) Montrer la convergence de $\int_0^1 t^\alpha [f'(t) + \varphi(t)f(t)]^2 dt$
 - b) En déduire $\alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f(t)^2 dt \leq \int_0^1 t^\alpha f'(t)^2 dt$

Exercice 69 (ENSAM PSI 2009) [Solution]

Soient deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence infinis, avec $b_0 \geq 0$ et $b_n > 0$ pour $n \geq 1$. On note f et g les sommes de ces séries.

1. Montrer que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$.
indication : si $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \varepsilon b_n$ et remarquer que, pour $x > 0$, $g(x) \geq b_n x^n$.
2. Montrer que si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$. (*indication : $a_n \sim b_n$ ssi $a_n - b_n = o(b_n)$*)
3. Montrer que le RCV de $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ et déterminer un équivalent de sa somme en $+\infty$.

VIII Permutations somme/intégrale

Exercice 70 (CCP PSI 2011) [Solution]

Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ après avoir justifié la convergence.

Exercice 71 (CCP PSI 2009) [Solution]

1. Calculer $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall x > 0, e^{-x} \cos \sqrt{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx$ sous forme d'une somme de série.

Exercice 72 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$

1. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$

3. Rappeler le DSE de $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et en déduire une expression de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sous la forme de la somme d'une série.

Exercice 73 (CCINP PSI 2023) [Solution]

1. Convergence et calcul éventuel de $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$.

3. Justifier que si $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

Exercice 74 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Justifier l'existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt) e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Justifier que F est DSE.

Exercice 75 (Centrale PSI 2021) [Solution]

1. Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$

2. Déterminer les fonctions f DSE paires solutions de $x(x^2-1)y'' + 3x^2y' + xy = 0$

3. Comparer f et $g : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-x^2 \sin^2 t}$

Exercice 76 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition de $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

2. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur ce domaine.

3. Montrer que f est DSE et donner le rayon de convergence.

Exercice 77 (CCP PSI 2018) [Solution]

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ est absolument convergente. On pose $f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ existe, pour $n \in \mathbb{N}$, et la calculer.

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 78 (CCP PSI 2017) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$.

1. Montrer que f est-elle développable en séries entières.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$.

Exercice 79 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soient $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \int_0^1 \varphi_\lambda(t) \cos(xt) dt$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0, 1]$?
2. Montrer que I_λ est définie et de classe C^2 sur \mathbb{R} puis exprimer I_λ'' en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$
3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 80 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-x \sin^2 t} dt$ est définie sur $] -\infty, 1[$.
2. Montrer que f est DSE.

Exercice 81 (Centrale PSI 2015) [Solution]

1. Si le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $R > 0$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, montrer que $f \in C^0([-R, R])$.
2. Soit $f(t) = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right|$. Exprimer $\int_0^1 f(t) dt$ à l'aide de la somme d'une série.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et la calculer, en admettant $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

IX Séries génératrices

Exercice 82 (ENSAM PSI 2009) [Solution]

On donne $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq 2^{n+1} - 1$.
2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$?
3. Calculer S et en déduire la valeur de u_n .

Exercice 83 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour $n \geq 0$.

1. Trouver deux réels a et b tels que $u_{n+1} + a(n+1) + b = 2(u_n + an + b)$
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
3. Déterminer le rayon R de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ et calculer sa somme.
4. Étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.
5. Retrouver l'expression de la somme de la série entière à partir de la relation initiale définissant (u_n) .

Exercice 84 (CCINP PSI 2019) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|a_n| \leq 2^{n+2}$
2. Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est > 0 puis que $S(x) = \frac{6x^2 + 6x - 4}{(x+1)(x-1)^2}$ pour $|x| < R$.
3. Trouver a, b, c tels que $S(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

4. Déterminer a_n en fonction de n .

Exercice 85 (Navale PSI 2022) [Solution]

Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$? On note $f(x)$ la somme.

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire $f(x)$.

Exercice 86 (CCP PC 2015) [Solution]

Soit $d_0 = 1, d_1 = \frac{1}{2}$ et $d_n = \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 - (n-i+2)^{-1} & \text{si } i = j \\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i}^{-1} = (n-i+2)^{-1/2} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer d_2 et montrer que $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

2. Montrer que $|d_n| \leq 1$; qu'en déduire sur le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n \geq 0} d_n x^{n+1}$?

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par S . En déduire $S(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-x}$ puis d_n .

Exercice 87 (CCINP PSI 2019) [Solution]

On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

1. Montrer que $\frac{a_n}{n!} \leq 1$

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

3. Résoudre cette équation en en déduire la valeur de a_{2p} et a_{2p+1}

Exercice 88 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{n+1}$

1. Prouver que $0 \leq a_n \leq 1$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$?

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme S de cette série entière sur $] -r, r[$, où $r = \min(1, R)$

3. Donner les solutions de cette équation différentielle en fonction de $\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{1-t} dt$.

Exercice 89 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?

3. Montrer que la somme f de la série entière précédente vérifie $f'(x) = f(x)^2$.

4. En déduire la valeur de a_n .

indication : déterminer f en se plaçant sur un intervalle $] -h, h[$ où f ne s'annule pas.

Exercice 90 (ENS PSI 2018) [Solution]

Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$. On pose $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est ≥ 1 .

2. Trouver (b_n) telle que, pour $|x| < 1$, $f'(x) = f(x) \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ puis trouver f .

Exercice 91 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

On note $a_n = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, 3p + 2q = n\}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

2. Déterminer f puis a_n .
indication : partir des DSE de $(1 - x^2)^{-1}$ et $(1 - x^3)^{-1}$.

Exercice 92 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

1. Si R est le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$, quel est le mode de convergence de la série sur $] -R, R[$?
2. On note p_n le nombre partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (nombre de façons d'obtenir $\llbracket 1, n \rrbracket$ comme réunion d'ensembles non vides 2 à 2 disjoints). Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$, avec $p_0 = 1$.
indication : compter les partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ en fonction du nombre d'éléments présent dans l'ensemble qui contient $n+1$.
3. Déterminer $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$.

Exercice 93 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

On note d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ avec $d_0 = 1$.
indication : dénombrer les permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en fonction de leur nombre de points fixes.
2. Déterminer $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ en considérant $e^x f(x)$ puis déterminer d_n .
indication : d_n s'exprime à l'aide d'un produit de Cauchy.

Exercice 94 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit E un ensemble et $I(E) = \{g : E \rightarrow E, g \circ g = id_E\}$

1. On pose $t_0 = 1$ et $t_n = \text{Card}(I(\llbracket 1, n \rrbracket))$. Calculer t_1, t_2 et t_3
2. Montrer que le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$ est ≥ 1 .
3. Montrer que $t_{n+2} = t_{n+1} + (n+1)t_n$
indication : distinguer si $g(n+2) = n+2$ où $g(n+2) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$
4. Déterminer $f(x)$

X Exercices théoriques

Exercice 95 (Centrale PSI 2015) [Solution]

Soit (a_n) une suite réelle telle que (na_n) tende vers 0 et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Montrer que $R \geq 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(\ln(1-x))$.
indication : pour $\varepsilon > 0$, couper la somme en N de sorte que $|a_n| \leq \varepsilon/n$ si $n \geq N$.
2. Réciproquement, si $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(\ln(1-x))$, a-t-on (na_n) tend vers 0 ?
indication : non ; avec $a_n = \frac{1}{n}$ s'il existe p tel que $n = 2^p$ et 0 sinon par exemple.

Exercice 96 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon infini. On note f sa somme.

1. Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p$.
2. On suppose f bornée sur \mathbb{C} .
- a) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq \frac{M}{r^p}$.
- b) Montrer que $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est constante.
3. On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta$. Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 97 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon 1 telle que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

1. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1})$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S$ et conclure que f est continue sur $[0, 1]$.

indication : couper la somme avec les restes à un rang n_0 à partir duquel $|R_n| < \varepsilon$, avant de faire tendre x vers 1.

Exercice 98 (Série de Taylor divergente) [Solution]

Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(in^2x)}{2^n}$ définit une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} dont la série de Taylor possède un rayon de convergence nul.

Exercice 99 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .

2. Montrer que F est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3. Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE ?

indication : vérifier que le RCV de la série de Taylor est nul.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. (nr^{n^2}) est bornée si et seulement si $r \in [0, 1[$ donc $R = 1$.

2. $a_{2n} = \exp(2n + O(1))$ donc $(a_{2n}r^{2n})$ est bornée si et seulement si $r \in [0, e^{-1}]$; $a_{2n+1} = \exp(-2n + O(1))$ donc $(a_{2n+1}r^{2n+1})$ est bornée si et seulement si $r \in [0, e]$. La suite $(a_n r^n)$ est donc bornée si et seulement si $r \in [0, e^{-1}]$ donc $R = e^{-1}$.

3. $|1 + 2i| = \sqrt{5}$ et $|2i| = 2 < \sqrt{5}$ donc par somme (et invariance du rayon par intégration terme à terme), $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice 2 [sujet] $R = \frac{1}{2}$ par d'Alembert

Exercice 3 [sujet] e par D'Alembert

Exercice 4 [sujet] 1. cours!

2. (a_n) bornée donc $R \geq 1$ et $\sum a_n DV$ donc $R \leq 1$

3. $|a_n| \leq 1$ (par concavité de \ln) donc $R \geq 1$ et $\lim a_{2n} = 1$ (DL) donc $\sum a_n DV$ et $R = 1$

Exercice 5 [sujet] 1. $\sum \frac{1}{1+k^2} CV$

2. $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq a_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ donc $a_n \sim \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

3. $R = 1$ par équivalent, $\sum a_n DV$ et $\sum a_n(-1)^n CV$ par CSSA ((a_n) est bien décroissante et tend vers 0) donc $D = [-1, 1[$

Exercice 6 [sujet] Si $l \in \mathbb{R}^{+*}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq n_0$, $(l - \varepsilon)^n \leq |a_n| \leq (l + \varepsilon)^n$ donc $\frac{1}{l + \varepsilon} \leq R \leq \frac{1}{l - \varepsilon}$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$ donc $R = \frac{1}{l}$.

Si $l = 0$, on trouve de même $R \geq \frac{1}{\varepsilon}$ donc $R = +\infty$ et si $l = +\infty$, on a $R \leq \frac{1}{l}$ pour tout $l > 0$ donc $R = 0$.

Exercice 7 [sujet] On a $t^n \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq 1$ si $t \in [0, 1]$ donc $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1$ donc $R = 1$. La série CV si $x \in [-1, 1[$: si $x = -1$, la série vérifie le CSSA car (a_n) tend vers 0 par TCD avec $\left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq 1$.

Exercice 8 [sujet] 1. $a_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{u^{1/n}}{u \operatorname{ch} u} \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u \operatorname{ch} u}$ par TCD avec $\left|\frac{u^{1/n}}{u \operatorname{ch} u}\right| \leq \frac{1}{\operatorname{ch} u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$

2. $a_n \sim \frac{I}{n}$ avec $I > 0$ donc $R = 1$ et $\sum a_n DV$ (SATP); par CSSA, $\sum (-1)^n a_n CV$

3. $\frac{1}{\operatorname{ch}(t^n)} = \frac{2e^{-t^n}}{1 - e^{-2t^n}} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t^n}$ donc (TITT) $a_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t^n} dt$ car $\int_1^{+\infty} |e^{-(2k+1)t^n}| dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt = \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)}$

Exercice 9 [sujet] (S_n) est le produit de Cauchy de (a_n) et (1) donc $R_S \geq R_a$; de même, $((n+1)T_n)$ est le produit de Cauchy de (S_n) et (1), puis par invariance par dérivation, $R_T \geq 1$.

$a_n = S_n - S_{n-1}$ donc par comme $R_a \geq R_S$ et $S_n = (n+1)T_n - nT_{n-1}$ donc $R_S \geq R_T$.

Exercice 10 [sujet] Si $b_n = P(n)$ alors $a_n = O(|b_n|)$ donc $R_b \leq R_a$ et si $0 \leq \rho < R_a$, il existe r tel que $\rho < r < R_a$, $(a_n r^n)$ est donc bornée puis $b_n \rho^n = (a_n r^n) \times P(n) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ tend vers 0 donc est bornée; on en déduit $\rho \leq R_b$ puis $R_a = R_b$ (ce qui est aussi valable si $R_a = +\infty$).

Exercice 11 [sujet] $R = 1$ par d'Alembert et, pour $|x| < 1$, $S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(3 - \frac{6}{n+2}\right) x^n = 3 \frac{x}{1-x} - \frac{6}{x^2} (-\ln(1-x) - x - x^2)$.

Exercice 12 [sujet] $R = 1$ puis $D =]-1, 1[$ (DVG en ± 1) $S(x) = \sum_{n \geq 0} \left(n+2 - \frac{5}{n+2}\right) x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} +$

$\frac{5}{x^2} (\ln(1-x) + x)$

Exercice 13 [sujet] On a $\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$ donc $R = 1$; si $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{2N} n^{(-1)^n} x_n = \sum_{n=0}^N 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} =$
 $2 \sum_{n=0}^N n(x^2)^n + \sum_{n=1}^{2N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{x^{2n}}{2n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{2x^2}{1-x^2} - \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$

Exercice 14 [sujet] 1. si $a_k = \sin(k\theta)$ tend vers 0 alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos^2(k\theta) = 1$ puis $a_{k+1} = a_k \cos \theta + \sin \theta \cos(k\theta)$ ne tendrait pas vers 0 car $\sin \theta \neq 0$

2. (a_n) est bornée donc $R \geq 1$ et $\sum a_n$ DV donc $R \leq 1$

3. si $|x| < 1$ alors $|xe^{i\theta}| < 1$ donc $f(x) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^k \right) = \text{Im} \frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{x \sin \theta}{1-2x \cos \theta + x^2}$

Exercice 15 [sujet] 1. Si $f_n(t) = x^n \sin^n t$ alors $\|f_n\|_{\infty, [0, \pi/2]} = |x|^n$ donc CN si $|x| < 1$ et on a $R \geq 1$ et pour $|x| < 1$,

$$S_1(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n \geq 0} (x \sin(t))^n dt = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-x \sin(t)} \stackrel{u=\tan(t/2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{1-2xu+u^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{u-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \text{ donc on a bien } R = 1 \text{ car } S_1 \text{ n'est pas bornée en } 1.$$

2. On a $R = 1$ (car $\left(\cos \frac{2n\pi}{3} \rho^n \right)$ est bornée si et seulement si $|\rho| \leq 1$) et pour $|x| < 1$, $S_2'(x) = \text{Re} \left(\sum_{n \geq 1} e^{2in\pi/3} x^{n-1} \right) =$

$$\text{Re} \left(\frac{e^{2i\pi/3}}{1-xe^{2i\pi/3}} \right) = \frac{-1/2-x}{1+x+x^2}; \text{ on en déduit } S_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) \text{ car } S_2(0) = 0$$

3. $R = +\infty$ puis $S_3(x) = \frac{1}{3} (e^x + j^2 e^{jx} + j e^{j^2 x})$

4. La série CV pour $|x| < 1$ et DV pour $x = 1$ donc $R = 1 \sum_{n=0}^{N^2-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=n^2}^{n^2+2n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1)x^n$ donc

$$S_4(x) = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 16 [sujet] 1. $f(x) = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{-x+2}{3(1-x+x^2)}$ puis $F(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$

2. $R = 1$ puis, si $|x| < 1$, $f'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{3n} = f(x)$ donc $S(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ car $S(0) = 0$

3. S est continue en 1 par CSSA et $\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{3n+4}$

Exercice 17 [sujet] 1. $R = 1$

2. $f'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$

3. On prouve la continuité sur $[0, 1]$: par CSSA, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{4n+5}$ donc CVU sur $[0, 1]$ et $f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$.

Exercice 18 [sujet] La série CN sur $[-1, 1]$ (donc f est continue sur $[-1, 1]$) et DVG si $|x| > 1$ donc $R = 1$. Pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} (-x^2 \arctan(x) - (\arctan(x) - x))$$

Exercice 19 [sujet] $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ donc $R = 1$ et pour $|x| < 1$, $f(x) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+1} =$
 $-2 \ln(1-x) - \frac{2}{x} (-\ln(1-x) - x)$

Exercice 20 [sujet] $D_f = [-1, 1]$ (donc $R = 1$) et si $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+1} - 4 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n+1} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) - 4g(x)$. Puis si $x > 0$, $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{x})^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(-\ln(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \ln(1-x) - \sqrt{x} \right)$. Pour $x < 0$, on a $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} (\arctan \sqrt{-x} - \sqrt{-x})$

Exercice 21 [sujet] $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ et (a_n) décroît donc $\frac{1}{n+1} \leq 2a_n \leq \frac{1}{n-1}$ et $R = 1$. Si $|x| < 1$ alors $f(x) = a_0 + a_1x + x^2 \sum_{n \geq 0} a_{n+2}x^n = a_0 + a_1x + x^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - a_n \right) x^n = a_0 + a_1x + (-x \ln(1-x) - x^2 - x^2 f(x))$ puis $a_0 = \frac{\pi}{4}$ et $a_1 = -\frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 22 [sujet] 1. $\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ donc $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $R = 1$.

2. $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{xt+1}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx} \right)$

3. si $u_n(t) = \frac{t^n x^n}{1+t^2}$ avec $|x| < 1$ alors $|u_n(t)| \leq |x|^n$ donc CVN sur $[0, 1]$ et $S(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (tx)^n dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}$ puis $S(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{x \ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + x \ln(1-x) \right)$. $S(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n t^n$ vérifie le CSSA sur $[0, 1]$ donc $|R_n(t)| \leq |u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+2}$ donc CVU sur $[0, 1]$. On en déduit $S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \frac{\pi - 6 \ln 2}{4}$.

Exercice 23 [sujet] $R = 4$ par d'Alembert. Par IPP successives $\int_0^1 t^n (1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$; pour $|x| < 4$, on pose $f_n(t) = x^n t^n (1-t)^n$; $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{|x|}{4}\right)^n$ donc CN sur $[0, 1]$ et $S(x) = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1-xt)(1-t)} = \dots$

Exercice 24 [sujet] 1. Par CSSA, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ donc $R \geq 1$ et $0 \leq (-1)^{n-1} a_n = \frac{1}{n} - (-1)^n a_{n+1}$ donc $|a_{n+1}| \geq \frac{1}{n}$ et $R = 1$.

2. Si $S_N(t) = \sum_{k=n}^N (-1)^{k-1} t^{k-1}$ alors avec $|S_N(t)| \leq \frac{2}{1+t}$, le TCD donne $a_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$; on en déduit $\sum a_n$ CV par CSSA et $\sum (-1)^n a_n$ DV par $(-1)^{n+1} a_n \geq \frac{1}{2n}$. Pour $|x| < 1$, on a $f(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1} x^n}{1+t} dt$ par CN ($\|u_n\|_\infty \leq \frac{|x|^n}{2}$ si $u_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1} x^n}{1+t}$) donc $f(x) = \int_0^1 \frac{x}{(1+t)(1+xt)} dt = \frac{x}{1-x} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{x}{1+xt} \right) dt = \frac{x}{1-x} \ln \frac{2}{1+x}$

Exercice 25 [sujet] $(\sin(n)\rho^n)$ est bornée si et seulement si $\rho \in [0, 1]$ donc $R = 1$ et pour $|x| < 1$, $S(x) = \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^i)^n \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{1-xe^i} \right) = \frac{x \sin(1)}{2(1-x \cos(1))}$

Exercice 26 [sujet] 1. $\mathcal{X}_A = (X-2)(X-1+i)(X-1-i)$ donc A n'est pas DZ sur \mathbb{R} , mais DZ sur \mathbb{C} .

2. On a $A^3 - 4A^2 + 6A - 4I_3 = 0$ (C-Ham) donc $A^{n+3} = 4A^{n+2} - 6A^{n+1} + 4A^n$ et $t_{n+3} = 4t_{n+2} - 6t_{n+1} + 4t_n$.

3. $t_n = 2^2 + (1+i)^n + (1-i)^n \sim 2^n$ donc $R = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-(1+i)x} + \frac{1}{1-(1-i)x}$ ou bien $f(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + \sum_{n \geq 0} t_{n+3}x^{n+3} = t_0 + t_1x + t_2x^2 + (4x(f(x) - t_0 - t_1x) - 6x^2(f(x) - t_0) + 4x^3 f(x))$

Exercice 27 [sujet] 1. $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+

2. $f_{n+1}(x_n) = 1 + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} > 1$ donc (x_n) décroît donc CV vers l . Puis $f_n(3/4) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(1 - 3/4) = \ln(4/3) > 1$ donc $x_n \in [0, 3/4]$ pour n grand. Par CN de la série entière sur $[0, 3/4]$, on a $1 = f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(1 - l)$ donc $l = 1 - e^{-1}$

Exercice 28 [sujet] On pose $S(x) = \sum_{n \geq 0} (2n^2 + 3n + 1)x^{n+1}$, donc $R = 1$ et $2n^2 + 3n + 1 = 2n(n-1) + 5n + 1$ donc

$$S(x) = 2 \frac{x^3}{(1-x)^3} + 5 \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \text{ puis } S(1/2) = 10.$$

Exercice 29 [sujet] Si $|x| < 1$, $\arctan(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et la série CU sur $[0, 1]$: par CSSA $|R_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc on obtient le résultat en faisant tendre x vers 1^- .

Exercice 31 [sujet] 1. on pose $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$, $R = 1$ puis pour $|x| < 1$, $S(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2} \right)$

$\arctan(x) - \frac{1}{2x} \ln(1+x)$ et le résultat par CVN sur $[-1, 1]$ avec $x = 1$

2. idem avec $T(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$ et, si $|x| < 1$, $T(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n} - \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+2} = -\ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \frac{1}{2x} \ln(1-x^2) = \frac{1-x}{2x} \ln(1-x) + \frac{1+x}{2x} \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2)$

Exercice 30 [sujet] 1. Cours

2. Si $x = \tan \frac{\pi}{8}$ alors x vérifie $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2x}{1-x^2}$ donc $x = -1 + \sqrt{2}$ (car $x > 0$) puis $\frac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2}-1) =$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \text{ car } 0 < \sqrt{2}-1 < 1$$

3. par CSSA, $\left| \frac{\pi}{8} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{2}-1)^{2k+1} \right| \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$

Exercice 32 [sujet] Si $x \in [0, 1[$ alors $f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $f(x)^2 = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$; reste à faire tendre x vers 1 : on

pose $u_n(x) = b_n x^n$ et on a $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n-2k+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ (poser $p = n - k$ dans la deuxième partie de la somme). On en déduit que $\sum u_n(x)$ est alternée pour $x \in [0, 1]$.

De plus $|b_n| \leq \frac{1}{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par comparaison avec une intégrale); reste la décroissance de $(|b_n|)$:

$|b_{n+1}| - |b_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right) \leq 0$ donc $(|u_n(x)|)$ est aussi décroissante si $x \in [0, 1[$. On en déduit $|R_n(x)| \leq |b_{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série CVU sur $[0, 1]$ et la somme est continue

en 1. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = f(1)^2 = \frac{\pi^2}{16}$.

Exercice 33 [sujet] 1. Si $|x| < 1$ alors $\left| \frac{\sin(na)}{n} x^n \right| \leq |x|^n$ donc $f(x)$ existe ($R \geq 1$) et $f'(x) = \text{Im} \left(\sum_{n \geq 1} e^{ina} x^{n-1} \right) =$

$$\text{Im} \left(\frac{e^{ia}}{1 - e^{ia}x} \right) = \frac{\sin(a)}{1 - 2x \cos(a) + x^2} = \frac{\frac{1}{\sin(a)}}{1 + \left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right)^2} \text{ donc } f(x) = \arctan \left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)} \right) + C \text{ avec } C = \frac{\pi}{2} - a \text{ car}$$

$f(0) = 0$.

2. Facile avec $\sin(na)x^n = S_n - S_{n-1}$

3. Même calcul que pour $f'(x)$: $S_n = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ika} x^k \right)$ donc $|S_n| \leq \frac{2}{|1 - xe^{ia}|} \leq C$ car $x \mapsto \frac{1}{|1 - xe^{ia}|}$ est continue donc bornée sur le segment $[0, 1]$. La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) S_n(x)$ CN sur $[0, 1]$ donc est continue en 1. La

question 2 étant valable aussi pour $x = 1$, on a $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(na)}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi - a}{2}$ car $\arctan\left(\frac{1 - \cos(a)}{\sin(a)}\right) = \arctan\left(\frac{2 \sin^2(a/2)}{2 \sin(a/2) \cos(a/2)}\right) = \frac{a}{2}$.

Exercice 34 [sujet] 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3}$ donc (d'Alembert) $R = \sqrt{2}$

2. Et on en déduit que $f'(x) = a_0 + \sum_{n \geq 0} (2n+3)a_{n+1}x^{2n+2} = a_0 + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}[(2n+1)a_n + a_n]x^{2n+2} = 1 + \frac{x^2}{2}f'(x) + \frac{x}{2}f(x)$;
 f est donc solution de $(2-x^2)y'(x) = xy(x) + 1$ avec $y(0) = 0$.

3. On résout cette équation différentielle et on trouve $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 35 [sujet] 1. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3}$ donc $R = 1$ et par Stirling $a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ donc $\sum a_n$ et $\sum a_n(-1)^{2n+1}$ DV (signes fixes)

2. Avec la relation entre a_{n+1} et a_n , on trouve $(1-x^2)S'(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_{n-1}x^{2n} = 1 + xS(x)$. On en déduit, avec

$$S(0) = 0, S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x).$$

Exercice 36 [sujet] 1. (w_n) décroît

2. $\lim w_n = 0$ par TCD avec $|\cos^n t| \leq 1$. La relation se trouve par IPP (cf cours intégrales de Wallis)

3. $w_n \geq w_{n+1} \geq w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$ donc $w_{n+1} \sim w_n$ donc $R = 1$ par d'Alembert. Si $|x| < 1$, on a $S(x) = \frac{\pi}{2} + x + \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) w_n x^{n+2} = \frac{\pi}{2} + x + x^2 S(x) - \sum_{n \geq 0} \frac{w_n}{n+2} x^{n+2}$ donc $S'(x) = 1 + x^2 S'(x) + 2xS(x) - xS(x)$.

Les solutions de $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ sont $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 37 [sujet] 1. (a_n) tend vers 0 par TCD avec $\left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq 1$

2. CSSA

3. a) $\frac{1+t^2}{2} \geq t^2$ donc $a_n \geq \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$; on en déduit $R \leq 1$ et comme $\sum a_n x^n$ CV pour $x = -1$, on a $R \geq 1$ donc $R = 1$.

b) On a $a_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right]_0^1 - \int_0^1 t \times nt \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1} dt = 1 - n(2a_n - a_{n-1})$ donc $(2n+1)a_n = 1 + na_{n-1}$; on

en déduit $x(2-x)f'(x) + (1-x)f(x) = \frac{1}{1-x}$. Les solutions de l'équation homogène sont, sur $]0, 1[$ ou $] -1, 0[$,

$y_0(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}}$ donc les solutions sur ces intervalles sont $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}} + f(x)$ et la seule solution

sur $] -1, 1[$ est f (si $\alpha \neq 0$, pas de limite finie en 0).

Si on souhaite déterminer la valeur de $f(x)$, par TITT ou CVN de $f_n : t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n$ sur $[0, 1]$ ($\|f_n\|_{\infty}^{[0,1]} \leq$

$|x|^n$ et $|x| < 1$), on a $f(x) = \int_0^1 \frac{2 dt}{2 - (1+t^2)x}$ qui se calcule en décomposant en éléments simples (se-

lon le signe de x); tous calculs faits, on trouve $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln\left(\frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) =$

$\frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{-x}{2-x}}$ si $x < 0$.

Exercice 38 [sujet] 1. Cours

2. $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n$

3. $a_0 = 0$ et $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ si $n \geq 1$ donc $a_n = a_{n-1}$ si $n \geq 2$.

4. $R = 1$ (si $a_1 \neq 0$) et $f(x) = a_1 \sum_{n \geq 1} x^n = a_1 \frac{x}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

Exercice 39 [sujet] $\frac{s}{2-s^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1-\frac{s}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} (1 - (-1)^n) \frac{s^n}{\sqrt{2}^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \geq 0} \frac{s^{2p+1}}{\sqrt{2}^{2p+1}} = \sum_{p \geq 0} \frac{s^{2p+1}}{2^{p+1}}$,
pour $|s| < \sqrt{2}$.

Exercice 40 [sujet] $f_1'(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{x}{1+i}} - \frac{1}{1+\frac{x}{1-i}} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{1+i} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{1-i} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{(1-i)^n} \right)$ pour
 $|x| \leq \sqrt{2}$ puis on intègre terme à terme avec $f_1(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $f_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{1+i} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+i)^n} - \frac{1}{1-i} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-i)^n} \right)$
 $f_2(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} = (1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \dots$ pour $|x| < 1$.

Exercice 41 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{\ln|1-t|}{t}$ est continue sur $] -\infty, 1[\setminus \{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 donc f est définie sur $] -\infty, 1[$; de plus $g(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \ln(1-t)$ donc g est intégrable sur $]0, 1[$ et $D_f =] -\infty, 1[$.

2. Comme g est continue (prolongée en 0) sur $] -\infty, 1[$, f est \mathcal{C}^1 et $f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ pour $|x| < 1$ ($R = 1$); f est elle aussi DSE sur $] -1, 1[$ comme primitive d'une fonction DSE (et $R = 1$ aussi)

3. $g(t) = \sum_{n \geq 1} f_n(t)$ avec $f_n(t) = -\frac{t^{n-1}}{n}$ sur $]0, 1[$ donc par TITT, avec $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{n^2}$, on a $f(1) = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Comme f est continue sur $[0, 1[$ et $f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty$, f n'est pas dérivable en 1 (TAF)

Exercice 42 [sujet] $t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ est continue sur \mathbb{R} donc f est \mathcal{C}^1 et $f'(x) = \frac{x}{1+x^3}$; pour $|x| < 1$, $f'(x) = x \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{3n}$

donc $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ ($R = 1$)

Exercice 43 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{1-t}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $F'(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$

2. $F(x) = \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

3. si $|x| < 1$, $F'(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2}$

4. On vérifie la CVN de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^2 \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]$ sur $[0, 1]$ (étude de fct par ex) donc $S = f(1)$

Exercice 44 [sujet] $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = -\ln(2) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n2^n} - \ln(3) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n3^n}$ pour $|x| < 2$.

Exercice 45 [sujet] Si $|x| < \frac{1}{2}$, on a $f(x) = \ln(1-x) + \ln(1-2x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{(2x)^n}{n}$.

g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $g'(x) = \frac{-2x}{1+x^4}$ donc si $|x| < 1$, $g'(x) = -2x \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{4n}$ puis $g(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$ ($R = 1$)

Exercice 46 [sujet] f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{-j}{1-jx} + \frac{-j^2}{1-j^2x}$ donc si $|x| < 1$, $f'(x) = -j \sum_{n \geq 0} (jx)^n - j^2 \sum_{n \geq 0} (j^2x)^n$

puis $f(x) = -\sum_{n \geq 0} \frac{j^{n+1} + j^{2(n+1)}}{n+1} x^{n+1} = -2 \sum_{p=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2p\pi}{3}\right) \frac{x^p}{p}$

Exercice 47 [sujet] $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-xe^\alpha} - \frac{1}{1-xe^{-\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{n\alpha} x^n - e^{-n\alpha} x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{sh}(n\alpha) x^n$ pour $|x| < \frac{1}{e}$.

Exercice 48 [sujet] 1. $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-2}}{n!}$ est DSE sur \mathbb{R} .

2. f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on vérifie que $f(x)$ ne s'annule pas (étudier le numérateur pour vérifier qu'il ne s'annule que en 0)

Exercice 49 [sujet] $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}$ (les impaires sont nulles)

Exercice 50 [sujet] $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ avec $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. On pose $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $|x| < R$

(on suppose $R > 0$); on a $fg = 1$ sur $] -R, R[$ si et seulement si $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$ donc $a_0 = 1, a_{2n+1} = 0$ (rec)

et $a_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} b_{2n-2k} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}$. On montre alors par récurrence que pour une telle suite on a

$$\left| \frac{a_{2n}}{2^n} \right| \leq 1 : \text{ pour } n=0 \text{ OK et si l'HR est vraie pour } k \leq n-1 \text{ alors } \left| \frac{a_{2n}}{2^n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{2k}}{2^k} \right| \frac{(1/2)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} \stackrel{\text{HR}}{\leq} \sum_{p=1}^n \frac{(1/2)^p}{(2p+1)!} \leq$$

$\sqrt{2}(\text{sh}(1/\sqrt{2}) - 1/\sqrt{2}) \leq 1$. On a donc bien f DSE et $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par contre $R \leq \pi$ car f n'est pas bornée en π .

Exercice 51 [sujet] 1. Si $|u| < 1, (1+u)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} u^n$ donc, si $|x| < 1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n \geq 0} 4^{-n} \binom{2n}{n} x^{2n+1};$

en dérivant, on trouve $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \sum_{n \geq 0} 4^{-n} \binom{2n}{n} (2n+1) x^{2n}$.

2. Il suffit de retrouver le DSE de $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-x^2} \times (1-x^2)^{-1/2}$ par produit de Cauchy et d'identifier les coefficients de ces 2 DSE

Exercice 52 [sujet] 1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est DSE sur $]0, 1[$, de même $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc, par primitive, arcsin est DSE sur $]0, 1[$ puis $x \mapsto \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ aussi (car le DSE de arcsin est impair) et par produit de Cauchy, f est DSE sur $]0, 1[$. De plus f est solution de $2x(1-x)y'(x) - (2x-1)y(x) = 1$ avec $y(0) = \lim_0 f = 1$. La seule solution DSE de cette eq diff est $y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ et $R = 1$

2. $\sum (-1)^n a_n$ vérifie le CSSA car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n}{2n+1} \leq 1$ et, avec Stirling, $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$ donc $\lim a_n = 0$. Par contre $\sum a_n$ DV avec l'équivalent précédent.

Exercice 53 [sujet] 1. f est \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$

2. $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $] -1, 1[$ donc arcsin aussi (primitive) donc f aussi (produit de Cauchy)

3. Mieux vaut utiliser l'eq diff : par C-Lip (les fct $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont continues sur $] -1, 1[$) f est la seule solution de l'eq diff telle que $y(0) = 0$; si $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1}$ (f est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires)

$$\text{on a } (1-x^2)y'(x) + xy(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n} \text{ donc } a_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 54 [sujet] 1. $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $] -1, 1[$ donc arcsin aussi par primitive puis f par produit

2. facile

3. par C-Lip (les fct $\frac{x}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1-x^2}$ sont continues sur $] -1, 1[$) f' est la seule solution de l'eq diff telle que $y(0) = 0$; si $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1}$ (f' est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires) on a

$$(1-x^2)y'(x) + xy(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n} \text{ donc } a_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \text{ puis } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Exercice 55 [sujet] f est \mathcal{C}^2 sur $] -1, 1[$ et vérifie $9(1 - x^2)f''(x) - 9xf'(x) + f(x) = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$ (f est la seule solution de ce problème de Cauchy sur $] -1, 1[$). On cherche une solution DSE impaire sous la forme $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1}$ et on suppose $R > 0$. On a $9(1 - x^2)y''(x) - 9xy'(x) + y(x) = \sum_{n \geq 0} [9(2n+1)(2n+2)a_{n-1} - 4(3n+1)(3n+2)a_n]x^{2n+1}$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_n = \frac{4(3n+1)(3n+2)}{9(2n+1)(2n+2)}a_{n-1} = \frac{4^n(3n+2)!}{3^{3n}(2n+2)!n!}a_0$; on vérifie $R = 1$ par d'Alembert donc $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{4^n(3n+2)!}{3^{3n}(2n+2)!n!} x^{2n+1}$ pour $|x| < 1$.

Exercice 56 [sujet] 1. $0 \leq \frac{H_n}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$ donc $R = +\infty$

2. $f'(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$

3. On résout l'éq diff et on trouve (avec $f(0) = 0$) $f(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$ (l'intégrale ne pose pas de pb car la fct est prolongeable par continuité en 0)

4. $\frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n$ donc $f(x) = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis prendre $x = 1$.

Exercice 57 [sujet] 1. f est \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} par récurrence.

2. Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ alors f est solution si et seulement si $(n+1)a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. et on a alors

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|\alpha + \lambda^n|}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } R = +\infty \text{ et toute série entière de cette forme est solution.}$$

3. f est continue donc bornée sur $[-|x|, |x|]$ ($|f| \leq C$ sur cet intervalle) puis $f^{(p+1)}(t) = \alpha f^{(p)}(t) + \lambda^p f^{(p)}(\lambda t)$ et $|\lambda| \leq 1$ donnent par récurrence $|f^{(p)}| \leq C(1 + |\alpha|)^p$. On a alors $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} C(1 + |\alpha|)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc f est DSE sur \mathbb{R} .

Exercice 58 [sujet] 1. Pour $\gamma = 1$, $f(x) = \alpha e^x$. Pour $\gamma = -1$ on a $f'(x) = f(-x)$ donc f' est \mathcal{C}^1 et on a $f'(0) = f(-0) = \alpha$ et $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = \alpha(\cos(x) + \sin(x))$

2. $R = +\infty$ par d'Alembert par ex, vérification de $f'(x) = f(\gamma x)$ facile

3. si $f'(x) = f(\gamma x)$ alors par récurrence, f est \mathcal{C}^∞ et $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2} f(\gamma^n x)$. Sur $[-A, A]$, on a $|f^{(n)}(x)| \leq \|f\|_{\infty, [-A, A]}$ donc $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_{\infty, [-A, A]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc f est DSE sur $[-A, A]$ pour

tout A donc sur \mathbb{R} . En posant $f(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, on trouve que f est alors la fonction de 2) donc S_α est un singleton composé de la fonction définie en 2)

Exercice 59 [sujet] On cherche $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $R > 0 : x^2 y''(x) + 6x y'(x) + (6 - x^2)y(x) = 6a_0 + 12a_1 x + \sum_{n \geq 2} [(n+2)(n+3)a_n - a_{n-2}]x^n$ donc y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_0 = -\frac{1}{6}$, $a_1 = 0$ et $a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+3)}$; on en

déduit $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{-1}{(2p+3)!}$ donc $R = +\infty$ et $y(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{-1}{(2p+3)!} x^{2p} = \frac{x - \text{sh}(x)}{x^3}$.

Exercice 60 [sujet] 1. Par CSSA sur I , on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ donc CVU sur I qui permet d'étendre l'égalité en 1 par continuité.

2. $o(x^n)$ donc ACV si $x \in [0, 1[$ et $\sim \frac{1}{4n^2}$ si $x = 1$ (donc ACV aussi)

3. Si $x \in [0, 1[$, $S'(x) = \sum_{n \geq 0} \left(x^{2n} - \frac{1}{2} x^n \right) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1+x)}$ donc $S(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x)$. Puis $S(1) =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \ln(2)$$

4. S n'est pas continue en 1 donc pas de CVU sur $[0, 1]$.

Exercice 61 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est \mathcal{CM}^0 sur $] -\infty, 1[$ (prolongeable par continuité en 0) et intégrable sur $[0, 1[$ donc $D =] -\infty, 1[$ et F est même \mathcal{C}^1 sur D

2. si $|t| < 1$, $\frac{\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ et on intègre terme à terme sur le segment $[0, x] \subset] -1, 1[$.

3. On a $F(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$; vérifier que $x \mapsto F(x) + F(1-x)$ et $x \mapsto \ln(x) \ln(1-x)$ ont les mêmes dérivées. On a donc $F(x) + F(1-x) = \ln(x) \ln(1-x) + C$; par continuité de F (et S par CVN) en 1, on a $C = F(1) = -\frac{\pi^2}{6}$ car $\ln(x) \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Exercice 62 [sujet] 1. si $|x| < 1$, $x^{n^2} = o(x^n)$ et si $|x| \geq 1$, DVG

2. c'est une série entière (lacunaire) donc f est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$

3. $t \mapsto \exp t^2 \ln(x)$ décroît sur \mathbb{R}^+ si $x \in [0, 1[$; on trouve $\int_1^{+\infty} \exp(t^2 \ln(x)) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \exp(t^2 \ln(x)) dt$ donc (poser $u = t\sqrt{-\ln x}$) puis $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{-\pi \ln x}}{2}$

Exercice 63 [sujet] 1. $D_f =] -1, 1[$ car $R = 1$ et la série DVG en ± 1

2. $(1-x)f(x) + \ln(1-x) = \sum_{n \geq 1} \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] x^n$ qui CVN sur $[0, 1]$ car $-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $(1-x)f(x) + \ln(1-x) \underset{x=1}{=} C + o(1)$, ce qui donne l'équivalent.

Exercice 64 [sujet] 1. On prouve $H_n \sim \ln(n)$ (par la question 2 par exemple) donc $a_n H_n \sim a_n \ln n$

2. Fait en cours (dualité suite/série)

3. On pose $g(x) = \sum_{n \geq 1} H_n x^n$ et on a $R = 1$; (H_n) est le produit de Cauchy des suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et (1) donc $g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$. On vérifie, avec $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln n x^n$ que $R = 1$ puis $f(x) - g(x) = \sum_{n \geq 1} (\ln(n) - H_n) x^n$. La suite $(\ln(n) - H_n)$ est bornée donc $|g(x) - f(x)| \leq C \sum_{n \geq 1} x^n = \frac{Cx}{1-x}$; on a donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} g(x) + O\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et comme $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 1}{=} o(g(x))$, on a $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 65 [sujet] 1. $\lim f_n = 0$ et $I_n \geq 0$

2. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n (t-1) dt \leq 0$ donc (I_n) décroît, minorée par 0 donc CV puis $0 \leq I_n \leq e^{-1} \int_0^1 t^n dt = \frac{e^{-1}}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$

3. facile puis $\lim I_{n-1} = 0$ donc $(n+1)I_n \rightarrow e^{-1}$

4. $R = 1$ (par equiv), $\sum I_n$ DV (par equiv SATP) et $\sum (-1)^n I_n$ CV par CSSA donc $D_g =] -1, 1[$

5. $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1-xt} dt$ par TITT avec $\int_0^1 |xt|^n e^{-\frac{1}{t}} dt \leq e^{-1} |x|^n$ par ex

6. $I_n - \frac{e^{-1}}{n} = -\frac{I_n + I_{n-1}}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $g(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n} x^n = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1} I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) = \ell$ par CVN sur $[0, 1]$. On a donc $g(x) - \frac{e^{-1}x}{1-x} \underset{x \rightarrow 1}{=} \ell + o(1)$ donc $g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^{-1}}{1-x}$

Exercice 66 [sujet] 1. $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\left(\frac{a_n}{n!} \rho^n\right)$ et $\left(\frac{A_n}{n!} \rho^n\right)$ tendent vers 0 pour tout $\rho \geq 0$ car (a_n) et (A_n) convergent

3. a) $g'(t) - g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n = f'(t)$

b) Les deux fonctions ont la même dérivée et sont toutes les deux nulles en 0

4. $\int_0^{+\infty} f(u) du = A$ par TITT avec $f_n(u) = \frac{a_n}{n!} u^n e^{-u}$ et $\int_0^{+\infty} |f_n(u)| du = |a_n|$ puis $\sum |a_n|$ CV par hypothèse.

Exercice 67 [sujet] 1. $\frac{\text{th}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc a_n existe (si $n \geq 1$) puis si $t \geq n$, $\frac{\text{th}(n)}{t^2} \leq \frac{\text{th}(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ donc $\frac{\text{th}(n)}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{n}$ donc $R = 1$ puis $\sum a_n$ DV et $\sum (-1)^n a_n$ CV par CSSA (lim $a_n = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente) donc $D_S = [-1, 1[$.

2. Si $x \in [-1, 0]$, le CSSA est vérifié donc $|R_n(x)| \leq a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CVU sur $[-1, 0]$ et S est continue en -1 .

3. $a_n \sim \frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ puis $S(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(t) - 1}{t^2} dt x^n$. On a ensuite $1 - \text{th}(t) = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \leq 2e^{-2t}$ donc $\left| a_n - \frac{1}{n} \right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{2e^{-2t}}{t^2} dt \leq 2e^{-2n} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2e^{-2n}}{n}$. On en déduit la CVN sur $[0, 1]$ de $\sum_{n \geq 1} \left(a_n - \frac{1}{n} \right) x^n$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \left(a_n - \frac{1}{n} \right) x^n = \ell$ est finie. On a $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} + \ell + o(1) = -\ln(1-x) + \ell + o(1)$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-x)$.

Exercice 68 [sujet] 1. $xy'(x) + \alpha y(x) - xy(x)^2 = \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n + \alpha) a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} \right] x^n$ donc y est solution ssi

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n + \alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} \text{ puis on vérifie par récurrence } 0 \leq a_n \leq 1 \text{ donc } R \geq 1$$

2. on a $0 \leq a_n \leq 1$ donc, pour $0 \leq x < 1$, $0 \leq \varphi(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

3. a) avec T-Y, comme $f(1) = 1$, on a $f(t) = f'(1)(t-1) + o(t-1)$ donc $\varphi \times f$ est bornée au voisinage de 1

b) On a $I \geq 0$ et $I = \int_0^1 t^\alpha f(t)^2 + 2 \int_0^1 t^\alpha \varphi(t) f'(t) f(t) dt + \int_0^1 t^\alpha \varphi(t)^2 f'(t)^2 dt$. On a $t^\alpha \varphi(t) f(t)^2 = O(1-t)$ donc $2 \int_0^1 t^\alpha \varphi(t) f'(t) f(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_0^1 t^{\alpha-1} [t\varphi'(t) + \alpha\varphi(t)] dt \stackrel{(\varepsilon)}{=} - \int_0^1 t^{\alpha-1} [\alpha + t\varphi(t)^2] f(t)^2 dt$ donc on a $I = \int_0^1 t^\alpha f(t)^2 dt - \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f'(t)^2 dt$.

Exercice 69 [sujet] 1. $|f(x)| \leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k \right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq |P(x)| + \varepsilon g(x)$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k$. Comme $g(x) \geq b_{n_0} x^{n_0}$ et $b_{n_0} > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{g(x)} = 0$ donc il existe A tel que, pour $x \geq A$, on a $|P(x)| \leq \varepsilon g(x)$. On en déduit, pour $x \geq A$, $|f(x)| \leq 2\varepsilon g(x)$.

2. $a_n - b_n = o(b_n)$ donc $f(x) - g(x) = o(g(x))$ avec la première question

3. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp \left[n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \exp \left[n - \frac{1}{2} + o(1) \right] \sim \frac{e^n}{\sqrt{e}}$ donc $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{e^n}{n!}$. On en déduit que $R = +\infty$ et, avec la question précédente, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n \geq 0} \frac{(ex)^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}$.

Exercice 70 [sujet] $\ln(\text{th}(x)) = \ln(1 - e^{-2x}) - \ln(1 + e^{-2x}) = - \sum_{n \geq 0} \frac{2}{2n+1} e^{-2(2n+1)x}$ pour $x > 0$ et on applique le

TITT avec $f_n(x) = \frac{2}{2n+1} e^{-2(2n+1)x}$ et $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 71 [sujet] 1. $I_k = \Gamma(k+1) = k!$

2. DSE de $\cos(u)$ avec $u = \sqrt{x}$

3. On applique le TITT avec $f_n(x) = (-1)^n e^{-x} \frac{x^k}{(2k)!}$ et $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{k!}{(2k)!}$ qui est le terme général d'une série CV (par d'Alembert); on trouve $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!}$.

Exercice 72 [sujet] 1. $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$

2. poser $u = \frac{1}{x}$

3. pour $|u| < 1$, $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} u^{2n}$ donc (TITT) $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{2n+1/2}$ car $\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{2n+1/2} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ par Stirling.

Exercice 73 [sujet] 1. $I_{k,n}$ existe si $n \geq 1$ et dans ce cas $I_{k,n} \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{k!}{n^{k+1}}$

2. $R = e$ par d'Alembert

3. $\frac{tx}{e^t - tx} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} x^n$ si $|txe^{-t}| < 1$ donc comme $\max_{\mathbb{R}^+} te^{-t} = \frac{1}{e}$, si $|x| < e$. On a alors $\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n,n} x^n$ pour $|x| < e$.

Exercice 74 [sujet] 1. $\text{sh}(xt)e^{-t^2} \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $F(x) \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} I_n$ avec $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} \times te^{-t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} n! I_0 = n! \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (donc DSE pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 75 [sujet] 1. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \times \sin^{2n-1}(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} (2n-1) \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t) \sin^{2n-2}(t) dt = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ donc $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$ puis $I_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$

2. si $|x| < R$ et $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$, $x(x^2 - 1)y''(x) + 3x^2 y'(x) + xy(x) = \sum_{n \geq 0} [(2n+1)^2 a_n - (2n+2)(2n+1)a_{n+1}] x^{2n+1}$ donc f est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n$ donc $R = 1$ et si $|x| < 1$, on a $f(x) = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$

3. si $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} I_n x^{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n \geq 0} \sin^{2n}(t) x^{2n} dt = \frac{2}{\pi} g(x)$ car $|\sin^{2n}(t) x^{2n}| \leq |x|^{2n}$ donc CVN sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (variable t).

Exercice 76 [sujet] 1. $f(x, t) = \frac{t^x}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$ donc $D_F =] -1, +\infty[$.

2. Si $a > -1$, $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = \frac{|\ln t|^n t^x}{1+t} \leq \frac{|\ln t|^n t^a}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\frac{1-a}{2} < 1$.

3. $t^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n x^n}{n!}$ puis, si $|x| < 1$, $F(x) \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ avec $I_n = \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{1+t} dt$ par $\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 (-\ln t)^n dt \stackrel{\text{IPP}}{=} n!$. De plus $\frac{1}{2} \int_0^1 (-\ln t)^n dt \leq |I_n| \leq \int_0^1 (-\ln t)^n dt$ donne $R = 1$.

Exercice 77 [sujet] 1. (a_n) tend vers 0 donc $\frac{a_n}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et $R = +\infty$.

2. Par IPP (c'est $\Gamma(n+1) = n!$).

3. TITT avec $\int_0^{+\infty} \left| a_n \frac{t^n}{n!} \right| dt = |a_n|$.

Exercice 78 [sujet] 1. $\cos(x \cos t) = \sum_{n \geq 0} f_n(t)$ avec $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n} \cos^{2n} t}{(2n)!}$ et on applique le TITT avec $\int_0^\pi |f_n(t)| dt \leq \pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (série CV) ce qui donne $\int_0^\pi \cos(x \cos t) dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\int_0^\pi \cos^{2n} t dt \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

2. On trouve 0 (soit en dérivant terme à terme deux fois et en utilisant les relations entre les intégrales de Wallis, soit avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres et en faisant une IPP sur $f'(x)$).

Exercice 79 [sujet] 1. $\varphi_\lambda(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{2^{\lambda-1/2}}{(1-t)^{1/2-\lambda}}$ et $\frac{1}{2} - \lambda < 1$.

2. $|g(x, t)| \leq \varphi_\lambda(t)$ puis $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t\varphi_\lambda(t) \sin(xt)$ donc $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t\varphi_\lambda(t) \underset{1}{\sim} \varphi_\lambda(t)$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq t^2\varphi_\lambda(t)$ indép de x et intégrable sur $]0, 1[$.

$$I'_\lambda(x) = - \int_0^1 t \cos(xt) \times t\varphi_\lambda(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_0^1 [\cos(xt) - x \sin(xt)] \frac{(1-t^2)^{\lambda+1/2}}{2\lambda+1} dt \text{ puis } \int_0^1 \sin(xt)(1-t^2)^{\lambda+1/2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \int_0^1 x \cos(xt) \frac{(1-t^2)^{\lambda+3/2}}{2\lambda+3} dt$$

3. pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$, $\cos(xt)\varphi_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}\varphi_\lambda(t)}{(2n)!} x^{2n}$ puis TITT, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé, (H4) $\int_0^1 |f_n(t)| dt \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_\lambda(t) dt$

Exercice 80 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}$ est \mathcal{CM}^0 sur \mathbb{R}^+ pour $x < 1$ et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. Si $|x| < 1$, $g(t) = \sum_{n \geq 0} u_n(t)$ avec $u_n(t) = x^n \sin^{2n} t e^{-t}$ et on applique le TITT avec $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt \leq |x|^n \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = |x|^n$ (donc série CV); on trouve $f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t dt \right) x^n$.

Exercice 81 [sujet] 1. La série CVN sur $[-R, R]$

2. $f(t) = \frac{1}{t} [\ln(1-t) - \ln(1+t)] = - \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{2n+1}$ et on intègre terme à terme avec le TITT car $\int_0^1 \left| \frac{t^{2n}}{2n+1} \right| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$ (ce qui prouve aussi l'intégrabilité de f sur $]0, 1[$)

3. En posant $u = \frac{1}{t}$, on vérifie que $\int_0^f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt$

Exercice 82 [sujet] 1. récurrence

2. On en déduit $R \geq \frac{1}{2}$

3. Si $|x| < \frac{1}{2}$, on a $S(x) = 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n) x^n = 1 + x + x(S(x) - 1) + 2x^2 S(x) + \frac{x^2}{1+x}$; on en déduit $S(x) = \frac{1}{1-x-2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+x} \right) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{4}{9} \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{9} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{4}{9} \sum_{n \geq 0} 2^n x^n + \frac{2}{9} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} (n+1) x^n$. Au final, comme $a_n \sim \frac{4}{9} \times 2^n$, on a bien $R = \frac{1}{2}$.

Exercice 83 [sujet] 1. $u_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(u_n + n + 1)$

2. $u_n = 2^{n+1} - n - 1$

3. $R = \frac{1}{2}$ et $S(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$

4. $\left| \frac{u_n}{2^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ donc DVG en $\pm \frac{1}{2}$

5. Pour $|x| < R$, on a $S(x) = u_0 + x \sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^n = 1 + x \sum_{n \geq 0} (2u_n + n) x^n = 1 + 2xS(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$ (qui donne bien le même résultat !)

Exercice 84 [sujet] 1. récurrence (triple)

2. On en déduit $R \geq \frac{1}{2}$. $S(x) = -4 + 2x + 4x^2 + \sum_{n \geq 0} a_{n+3} x^{n+3} = -4 + 2x + 4x^2 + x(S(x) + 4 - 2x) + x^2(S(x) + 4) - x^3 S(x)$

3. $S(x) = \frac{-1}{1+x} - \frac{7}{1-x} + \frac{4}{(1-x)^2}$

4. $S(x) = - \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n - 7 \sum_{n \geq 0} x^n + 4 \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$ donc $a_n = -7 + 4(n+1) + (-1)^{n+1}$

Exercice 85 [sujet] 1. Par récurrence

2. Avec l'encadrement précédent, on trouve $R = 1$.

3. Si $|x| < 1$, $f(x) = 1 + x + \sum_{n \geq 1} \left(a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \right) x^{n+1} = 1 + x + x(f(x) - 1) + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1}$ donc $f'(x) = 1 + f(x) - 1 + xf'(x) + 2xf(x)$ puis $(1-x)f'(x) = (1+2x)f(x)$ et $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ car $f(0) = 1$.

Exercice 86 [sujet] 1. $d_2 = 2/3$; pour la relation de récurrence, il suffit de développer le déterminant successivement par la première colonne et par la première ligne du second déterminant qui est apparu.

2. $|d_n| \leq 1$ par récurrence donc $R \geq 1$.

3. S est C^1 sur $] -1, 1[$ et $S'(x) = d_0 + 2d_1x \sum_{n \geq 2} (nd_{n-1} + d_{n-2})x^n = 1 + x + x(S'(x) - 1) + xS(x)$; on en déduit la

valeur de $S(x)$ (et $R = 1$ car S n'est pas bornée en 1). Puis $S(x) = x \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} \right)$ donc

par produit de Cauchy et unicité des coefficients, on a $d_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$

Exercice 87 [sujet] 1. Récurrence

2. Comme $a_n \geq 1$, on en déduit $R \geq 1$; on pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$ et on a $(n+2)b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ donc $f'(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1)b_{n+1}x^n = b_1 + \sum_{n \geq 0} (n+2)b_{n+2}x^{n+1} = b_1 + \sum_{n \geq 0} (b_{n+1} + b_n)x^{n+1} = b_1 + (f(x) - b_0) + xf(x)$ donc f est solution de

$y'(x) = (1+x)y(x)$ avec $y(0) = 1$.

3. On en déduit $f(x) = e^{x+x^2/2} = e^x \times e^{x^2/2} = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n \right)$ avec $\alpha_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ et $\alpha_{2n+1} = 0$. Par

produit de Cauchy, on a $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(n-k)!}$ puis on distingue les cas n pair/impair. (En fait on a $R = +\infty$)

Exercice 88 [sujet] 1. récurrence puis $R \geq 1$

2. $f'(x) = \frac{1}{1-x} + f(x)$

3. $y(x) = \alpha e^x + e^x \varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 89 [sujet] 1. récurrence

2. $R \geq \frac{1}{4}$

3. $f(x)^2 = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} a_{n-k} (n-k)! = (n+1) \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$

4. $f(0) = 3$ donc $f > 0$ sur $] -h, h[$ (avec $h < R$); sur cet intervalle $\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$ donc $f(x) = \frac{3}{1-3x} = \sum_{n \geq 0} 3^{n+1} x^n$

Exercice 90 [sujet] 1. On vérifie $|a_n| \leq 1$ par récurrence.

2. Si $|x| < 1$, $f(x) = 1 + \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1}$ donc on trouve $f'(x) = f(x) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ (produit de Cauchy) donc $f'(x) =$

$-\frac{\ln(1-x) + x}{x^2} f(x)$ et en résolvant cette éq diff, avec $f(0) = 1$, on trouve $f(x) = \frac{x^2}{1-x} \exp\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$.

Exercice 91 [sujet] 1. $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ donc $a_n \leq (n+1)^2$ et $R \geq 1$ comme (a_n) ne tend pas vers 0 la série est GDV en ± 1 et $D_f =] -1, 1[$.

2. Pour $|x| < 1$, on écrit $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n$ et $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n \geq 0} \beta_n x^n$ et on a $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ avec

$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = a_n$ car $\alpha_k \beta_{n-k} = 1$ si et seulement si $k = 2p$ est pair et $n-k = 3q$ est un multiple de 3. On

détermine ensuite a_n avec le DSE de $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)(1-jx)(1-j^2x)}$ qui s'obtient à partir de la décomposition en éléments simples.

Exercice 92 [sujet] 1. CVS seulement et CVNTS de $] - R, R[$.

2. Pour construire une partition de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on commence par construire un ensemble contenant $n+1$: le nombre d'ensemble contenant $n+1$ et de cardinal $k+1$ est $\binom{n}{k}$ (il reste à choisir les k autres éléments parmi $\llbracket 1, n \rrbracket$) puis il reste à constituer une partition de l'ensemble des $n+1 - (k+1) = n-k$ entiers restants, il y a p_{n-k} choix possibles. Le nombre de partitions pour lesquelles $n+1$ appartient à un ensemble de cardinal $k+1$ (avec $k \geq 0$) est donc $\binom{n}{k} p_{n-k}$. En faisant varier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k} \stackrel{h=n-k}{=} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} p_h$

3. On pose $b_n = \frac{p_n}{n!}$ et on a $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(n-k)!}$; on vérifie $0 \leq b_n \leq 1$ donc $R \geq 1$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n = f(x) \times e^x$ par produit de Cauchy. On a donc $f(x) = f(0) \exp(e^x) = \exp(e^x - 1)$ car $f(0) = p_0 = 1$.

Exercice 93 [sujet] 1. On compte le nombre de permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en fonction de leur nombre de points fixes : pour créer une permutation ayant k points fixes, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ choix possible) et pour chaque choix de cet ensemble, la restriction à l'ensemble des autres $n-k$ points est une permutation sans point fixe (il y a d_{n-k} choix possibles); le nombre de permutations ayant k points fixes est donc $\binom{n}{k} d_{n-k} = \binom{n}{n-k} d_{n-k}$. L'égalité s'obtient en ajoutant ces quantités et en utilisant que le nombre total de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $n!$.

2. Par définition, on a $0 \leq d_n \leq n!$ donc $R \geq 1$; $e^x f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{k!(n-k)!}$ (produit de Cauchy) donc $a_n = 1$. On a donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)$ donc $d_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ (encore produit de Cauchy).

Exercice 94 [sujet] 1. $I(\{1\}) = \{id\}$ donc $t_1 = 1$; $I(\{1, 2\}) = \{id, (12)\}$ ((12) est l'appl qui échange 1 et 2) donc $t_2 = 2$ et $I(\{1, 2, 3\}) = \{id, (12), (13), (23)\}$ donc $t_3 = 4$

2. $I(\llbracket 1, n \rrbracket) \subset \mathcal{S}_n$ (ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$) donc $t_n \leq n!$

3. Si $g(n+2) = n+2$ alors $g|_{\llbracket 1, n \rrbracket} \in I(\llbracket 1, n \rrbracket)$ donc il y a t_{n+1} applications de ce type. Sinon $g(n+2) = k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ (il y a $n+1$ choix pour k) puis $g(k) = n+2$ et $g|_{E_k} \in I(E_k)$ où $E_k = \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ donc il y a $(n+1)t_n$ applications de ce type

4. si $a_n = \frac{t_n}{n!}$, on a $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} (a_{n+1} + a_n)$ donc f est solution de $f'(x) = (1+x)f(x)$ avec $f(0) = t_0 = 1$ donc $f(x) = e^{x+x^2/2}$

Exercice 95 [sujet] 1. $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $R \geq 1$; pour $x \in [0, 1[$, on a $\left| f(x) - \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n \right| \leq \varepsilon \sum_{n \geq n_0+1} \frac{x^n}{n} = \varepsilon \left(-\ln(1-x) - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x^n}{n} \right)$; on en déduit $\left| \frac{f(x)}{-\ln(1-x)} - 1 \right| \leq \varepsilon + \frac{|P_\varepsilon(x)|}{-\ln(1-x)}$ où P_ε est un polynôme qui ne dépend que du choix de ε (donc fixé); Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P_\varepsilon(x)}{-\ln(1-x)} = 0$, il existe $r > 0$ tel que $1-r < x < 1 \Rightarrow \frac{|P_\varepsilon(x)|}{-\ln(1-x)} \leq \varepsilon$ donc on a bien l'équivalent demandé.

2. Pour l'exemple donné, (na_n) ne tend pas vers 0 et $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} x^{2^p}$ donc $|f(x)| \leq \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^p}$ est bornée donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o(\ln(1-x))$.

Exercice 96 [sujet] 1. $f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k \geq 0} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ et on intègre terme à terme car $\int_0^{2\pi} |a_k r^k e^{i(k-n)\theta}| d\theta =$

$2\pi |a_k| r^k$ (série CV); on ne déduit le résultat car $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{n,k}$

2. a) $\left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt \right| \leq 2\pi \|f\|_\infty$

b) Quand r tend vers $+\infty$ et $p \geq 1$, on en déduit $a_p = 0$ donc $f = a_0$ est constante

3. On a cette fois $\left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt \right| \leq 2\pi(\alpha r^q + \beta)$ donc $|a_p| \leq \alpha r^{q-p} + \beta r^{-p} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ si $p \geq q + 1$. Il reste donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^q a_n x^n \in \mathbb{C}_q[X].$$

Exercice 97 [sujet] 1. Utiliser $a_n = R_n - R_{n+1}$

2. $|f(x) - S| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n + \varepsilon \sum_{n \geq n_0+1} (x^n - x^{n+1}) \leq (1-x)(n_0+1)C + \varepsilon$ car (R_n) tend vers 0 donc est bornée et $x^{n_0+1} \leq 1$. n_0 étant fixé, il existe $r > 0$ tel que $1-r < x < 1 \Rightarrow (1-x)(n_0+1)C < \varepsilon$ donc $|f(x) - S| < 2\varepsilon$ pour x proche de 1, ce qui donne le résultat.

Exercice 98 [sujet] Si $u_n(x) = \frac{\exp(in^2x)}{2^n}$ alors $\|u_n^{(p)}\|_\infty = \frac{n^{2p}}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n^{(p)}$ CVN sur \mathbb{R} ce qui donne

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n}$; on a donc (en ne gardant que le terme d'indice p , les autres étant positifs) $f^{(p)}(0) \geq \frac{p^{2p}}{2^p}$ donc $\frac{1}{p!} f^{(p)}(0) \geq \frac{p^{2p}}{2^p p!} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ diverge pour tout $x \neq 0$; le rayon de convergence de la série de Taylor de f est donc nul.

Exercice 99 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq e^{-t}$

2. Avec $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| = t^{2k} \left| \cos\left(xt^2 + k\frac{\pi}{2}\right) \right| e^{-t} \leq t^{2k} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

3. On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{4k} e^{-t} dt = (-1)^k (4k)!$. La série de Taylor de F est donc

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(4k)!}{(2k)!} x^{2k} \text{ dont le RCV est nul donc } F \text{ n'est pas DSE.}$$