

## TD16 : Séries entières

---

### Exercice 1 (Mines-Ponts PSI 2017)

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$ .

### Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2023)

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.
2. Soit  $(a_n)$  une suite bornée telle que  $\sum a_n$  diverge. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .
3. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

### Exercice 3 (CCP PSI 2022)

On note  $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$ .

1. Prouver l'existence de  $a_n$ .
2. Montrer que  $a_n \sim \frac{1}{n}$ . (\*)
3. Déterminer le domaine de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

### Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta) x^k$ .

1. Montrer par l'absurde que  $u_k = \sin(k\theta)$  ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série de définition de  $f(x)$ .
3. Calculer  $f(x)$ . (\*)

### Exercice 5 (CCINP PSI 2021)

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière puis déterminer celui de  $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$  avec  $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ .
2. Trouver  $a, b, c$  tels que  $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}$ .
3. Déterminer  $S(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$  puis la valeur de  $S(-1)$ . (\*)

### Exercice 6 (CCINP PSI 2023)

Soit  $I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n dt$

1. Justifier l'existence de  $I_n$  et préciser son signe
2. Étudier les variations de  $(I_n)$ , puis sa convergence et sa limite
3. Par IPP, montrer que  $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$  et en déduire  $I_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$ .
4. On pose  $g(x) = \sum_{n \geq 0} I_n x^n$ . Déterminer le domaine de définition de  $g$
5. Écrire  $g(x)$  sous forme d'une intégrale pour  $|x| < 1$
6. Déterminer un équivalent de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ .

---

## Indications

### Exercice 3

2. *comparaison série/intégrale.*

### Exercice 4

3.  $\sin(k\theta) = \text{Im}(e^{i\theta})$ .

### Exercice 5

3. *il faut prouver la continuité en  $-1^+$  ; prouver la CVU de la série (alternée) sur  $[-1, 0]$*

### Exercice 6

5. *considérer  $\sum \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) x^n$  et sa limite quand  $x$  tend vers 1.*