

TD16 : Séries entières

Exercice 1 (Mines-Ponts PSI 2017)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2023)

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.
2. Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

Exercice 3 (CCP PSI 2022)

On note $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Prouver l'existence de a_n .
2. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{n}$. (*)
3. Déterminer le domaine de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k\theta) x^k$.

1. Montrer par l'absurde que $u_k = \sin(k\theta)$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série de définition de $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$. (*)

Exercice 5 (CCINP PSI 2021)

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière puis déterminer celui de $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ avec $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
2. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}$.
3. Déterminer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$ puis la valeur de $S(-1)$. (*)

Exercice 6 (CCINP PSI 2023)

Soit $I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n dt$

1. Justifier l'existence de I_n et préciser son signe
2. Étudier les variations de (I_n) , puis sa convergence et sa limite
3. Par IPP, montrer que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$ et en déduire $I_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$.
4. On pose $g(x) = \sum_{n \geq 0} I_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de g
5. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale pour $|x| < 1$
6. Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 1^- .

Indications

Exercice 3

2. comparaison série/intégrale.

Exercice 4

3. $\sin(k\theta) = \text{Im}(e^{i\theta})$.

Exercice 5

3. il faut prouver la continuité en -1^+ ; prouver la CVU de la série (alternée) sur $[-1, 0]$

Exercice 6

5. considérer $\sum \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) x^n$ et sa limite quand x tend vers 1.