I Espaces préhilbertiens réels

1. Espaces préhilbertiens réels

a) produit scalaires, identités remarquables ($\|u \pm v\|^2$) et identités de polarisation, inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire, cas d'égalités. Exemples à connaître : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

b) Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, unitaires, famille orthogonale, orthonormale, liberté d'une famille orthogonales de vecteurs non nuls, théorème de Pythagore, sous-espaces orthogonaux, somme directe orthogonale de sev, orthogonal d'une partie quelconque, propriétés ($X^\perp$ est un sev, $X^\perp = \mathrm{Vect}\{X\}^\perp$, $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$, $X \cap X^\perp \subset \{0\}$ et $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$)

2. Espaces euclidiens

a) Bases orthonormée, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, base adaptée à une somme directe orthogonale, expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

b) Formes linéaires et hyperplans : représentation d'une forme linéaire ($a \in E \mapsto (a|.)$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$), vecteur normal à un hyperplan, équation cartésienne dans une base orthonormale d'un hyperplan.

c) Projecteurs orthogonaux : supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien, dimension du supplémentaire orthogonal dans un espace euclidien, expression de la projection orthogonale sur F de dimension finie à l'aide d'une base orthonormée de F, distance à un sev de dimension finie (atteinte en un point unique), cas des droites et des hyperplans (dont on connait un vecteur normal).

II Séries entières

1. Convergence d'une série entière

a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 | (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement

b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1}\dfrac{z^n}{n}$.

À suivre : la fin des séries entières