Correction du DM11

(d'après CCP PSI 2009 maths 1)

Partie I

1. a) $d \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^+\right)$ et si $t \geqslant 0$, $d'(t) = 1 - \sin t \geqslant 0$ donc, comme $d(0) = 0$, on a $d \geqslant 0$, ce qui donne $1 - \cos t \leqslant t$ et comme $\cos \leqslant 1$, on a pour $t > 0$, $\boxed{0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t} \leqslant 1}$

b) $\delta \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ et si $t \geqslant 0$, $\delta'(t) = t - \sin t$ puis $\delta''(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$, comme $\delta'(0) = 0$, on a $\delta' \geqslant 0$ puis $\delta \geqslant 0$ car $\delta(0) = 0$. On a donc $\boxed{\text{pour } t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}}$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, bornée sur $]0,1]$ d'après **I.1.2** (en fait elle est prolongeable par continuité en 0) donc intégrable sur $]0,1]$. Pour $t > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

Si $x \geqslant 0$ alors $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui signifie que $\boxed{\varphi(x) \text{ existe si } x \geqslant 0}$

3. a) $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\left(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}\right) \mathrm{d}t \leqslant 0$ car $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \geqslant 0$ et $x \mapsto e^{-xt}$ est décroissante si $t \geqslant 0$.
Ainsi, φ est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\varphi \text{ converge en } +\infty}$

b) D'après **I.1.2**, on a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-xt}$ donc comme, pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour $x > 0$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2x}$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$

4. a) On note $f : (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ pour toutes ces questions. On a :
H1 : pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
H2 : pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
H3 : pour $x \geqslant 0$ et $t > 0$, on a $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \phi(t)$; ϕ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après **I.2** car $\phi(t) = f(0,t)$.
On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) On a,
H1 : pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H3 : la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H4 : si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ alors pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}$ d'après **I.1.1**. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
On en déduit que $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*}\right) \text{ et, pour } x > 0,\ \varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t}$

c) D'après **I.1.1**, on a pour tout $x > 0$ et $t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \leqslant e^{-xt}$ donc comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $x > 0$, on a $|\varphi'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0}$

d) On recommence à partir de $\varphi'(x)$:
H1 : pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (d'après l'hypothèse de domination dans le théorème $\mathcal{C}^1$)
H3 : la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H4 : Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ alors pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2e^{-at}$. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

On en déduit que $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^{+*}\right) \text{ et, pour } x>0,\ \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t}$

e) Pour $x>0$, les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-(x-i)t}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc on a :
$\varphi''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right)$ donc $\boxed{\varphi''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}}$

f) On en déduit que $\varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2} + C$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} \varphi' = C = 0$ ce qui donne $\boxed{\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}}$

φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = -\infty$ donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ (généralisation de la CS de dérivabilité, conséquence du TAF)

5. a) $x\ln\dfrac{x^2}{1+x^2} = -x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x^2}{1+x^2} = 0}$

b) La fonction $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc admet des primitives (calculons la primitive nulle en 0) : on effectue une IPP avec $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v(t) = t$; u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$)
$\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln\left(1+t^2\right)\Big]_0^x - \int_0^x t \times \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t$
donc $\boxed{\text{une primitive de } x \mapsto \ln\left(1+x^2\right) \text{ est } x \mapsto x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2x\arctan(x)}$

c) Comme $\varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, on a $\varphi(x) = x\ln(x) - x - \dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x - \arctan(x) + C'$, c'est-à-dire $\varphi(x) = \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2} - \arctan(x) + C'$. Comme $\displaystyle\lim_{+\infty}\varphi = 0$ on a $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2} - \arctan(x) + \dfrac{\pi}{2},\ \text{si } x>0}$

d) Si $x>0$, $\varphi(x) = x\ln(x) - \dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}$, par continuité de φ en 0, on a $\boxed{\varphi(0) = \displaystyle\lim_0 \varphi = \frac{\pi}{2}}$

Partie II

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^m t}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\dfrac{\sin^m t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{m-1} \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} 1 & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m \geqslant 2 \end{cases}$ donc prolongeable par continuité en 0 et $\boxed{t \mapsto \dfrac{\sin^m t}{t} \text{ est intégrable sur } \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]}$

2. On effectue une IPP sur l'intégrale (convergente) définissant $\varphi(0)$ avec $u(t) = 1-\cos(t)$ et $v(t) = \dfrac{-1}{t}$: les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus, on a $u(t)v(t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. On a donc $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (et cette dernière intégrale est convergente puisque $\varphi(0)$ existe). On en déduit $\boxed{J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } J_1 = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}}$

3. Pour $k \neq 0$, on effectue une IPP avec $u(t) = \dfrac{-i}{k}e^{ikt}$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$: les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$ et $|u(t)v(t)| = \dfrac{1}{kt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc les intégrales I_k et $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$ et $\left|\dfrac{e^{ikt}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{t^2}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$, donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et I_k converge.
Pour $k=0$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$ et positive donc I_0 diverge.
En résumé, $\boxed{I_k \text{ converge si et seulement si } k \neq 0}$

4. a) On a $\sin^m t \overset{\text{Euler}}{=} \left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^m \overset{\text{binôme}}{=} \dfrac{1}{(2i)^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^{m-k}e^{ikt}e^{-i(m-k)t}$ donc, par linéarité de l'intégrale
$\boxed{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin^m t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}I_{2k-m}(x)}$

b) Si $m = 2p+1$ alors pour tout $k \in [\![0,m]\!]$, $2k-m \neq 0$ donc toutes les intégrales I_{2k-m} converge donc par combinaison linéaire, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1} t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+1} t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, $\boxed{J_{2p+1} \text{ converge}}$

c) Si $m=2p$ alors toutes les intégrales I_{2k-m} convergent sauf si $k=p$. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin^{2p}t}{t}\,\mathrm{d}t$ est la somme de $2p$ intégrales convergentes et d'une intégrale divergente donc diverge donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$

Partie III

1. a) f est continue sur le segment $[-1,1]$ donc est bornée sur ce segment : $\forall i\in[-1,1], |f(t)|\leqslant M$; comme $\sin(\mathbb{R})=[-1,1]$, on a $|f(\sin(t))|\leqslant M$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On en déduit $|\gamma_n|\leqslant M\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{\pi M}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n=0}$

b) On pose $t=u+n\pi$ dans γ_n : $u\mapsto n\pi+u$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ et on a $\gamma_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f\left((-1)^n\sin(u)\right)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u=(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$ car f est impaire. Puis en posant $v=-u$, on a $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(-\sin v)}{n\pi-v}\,\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin v)}{v-n\pi}\,\mathrm{d}v$ à nouveau par imparité de f. On en déduit, en ajoutant les deux intégrales, par linéarité de l'intégrale $\boxed{u_n=\gamma_n}$

c) Si $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ est fixé alors $|u_n(t)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2tf(\sin t)}{n^2\pi^2}$ (SATP) donc $\boxed{\sum u_n(t) \text{ est absolument convergente}}$

d) Avec la relation admise, pour $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t}{t^2-n^2\pi^2}=\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}$ donc $S(t)=f(\sin(t))\left(\dfrac{1}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}\right)$; S est donc continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus $u_n(0)=0$ par imparité de f (donc $f(0)=0$) donc $S(0)=0$. Si $t>0$, on a $S(t)=f(\sin(t))\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}\underset{t\to0}{\sim}f(\sin(t))\dfrac{t^3/6}{t^2}\xrightarrow[t\to0]{}0$ car f est continue en 0 (donc $\lim\limits_{t\to0}f(\sin(t))=f(0)=0$) donc S est continue en 0 puis $\boxed{S \text{ est continue sur } \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]}$

e) On a $S(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k(t)+R_n(t)$; les u_k, $1\leqslant k\leqslant n$ et S étant continues sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, R_n l'est aussi (la somme est finie). On peut intégrer cette égalité sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}R_n(t)\,\mathrm{d}t$.

La somme étant finie, on a, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}u_k(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\mu_k=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k$ d'après **III.1.b**.

f) Soit $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ et N_x l'entier tel que $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}+N_x\pi,\dfrac{\pi}{2}+(N_x+1)\pi\right[$, $\left(\text{c'est-à-dire } N_x=\left\lfloor\dfrac{x}{\pi}-\dfrac{1}{2}\right\rfloor\right)$ on a, par Chasles, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N_x}\gamma_n+\int_{\frac{\pi}{2}+N_x\pi}^{x}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Comme $N_x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{N_x}\gamma_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n$.

D'autre part (avec les notations de **III1.a**), $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+N_x\pi}^{x}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{\pi M}{\frac{\pi}{2}+N_x\pi}$ car $0\leqslant x-\dfrac{\pi}{2}-N_x\pi\leqslant\pi$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+N_x\pi}^{x}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t=0$. Par somme $\boxed{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ CV et } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)\,\mathrm{d}t}$

g) Comme f est continue sur $[0,1]$, les fonctions $t\mapsto\dfrac{f(\sin t)}{t}$ et $t\mapsto\dfrac{f(\sin t)}{\sin t}$ sont continues sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, comme f est dérivable en 0 et impaire (donc $f(0)=0$), $\dfrac{f(\sin t)}{\sin t}=\dfrac{f(\sin(t))-f(\sin(0))}{\sin(t)}\xrightarrow[t\to0]{}(f\circ\sin)'(0)=f'(0)$ donc $t\mapsto\dfrac{f(\sin t)}{\sin t}$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Enfin, comme $\sin\underset{0}{\sim}t$, on a $\dfrac{f(\sin t)}{t}\underset{0}{\sim}\dfrac{f(\sin t)}{\sin t}$ donc $t\mapsto\dfrac{f(\sin t)}{t}$ est aussi intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $g(t)=f(\sin t)\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\sin t}\right)+S(t)=0$. (*Quelle formulation bizarre pour cette question !*)

2. a) La fonction id est continue sur $[-1,1]$, impaire et dérivable en 0 donc $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$, avec $g = 0$, d'après **III.1**. On en déduit $\boxed{J_1 = \dfrac{\pi}{2}}$

b) Cette fois avec $f = id^3$ continue, impaire et dérivable en 0, on a $J_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$ toujours avec $g = 0$. On en déduit que $J_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{J_3 = \dfrac{\pi}{4}}$

c) Avec $f = id^{2p+1}$ toujours continue, impaire et dérivable en 0, on a $J_{2p+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t\,\mathrm{d}t$ car à nouveau, on a $g = 0$. On retrouve les intégrales de Wallis donc $\boxed{J_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$