DM12

(d'après CCINP PC 2018)

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I : orthogonalité de $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

3. En dérivant n fois l'égalité $U_n(x) = U_n(-x)$, déterminer la parité de L_n en fonction de n.

4. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans la suite de l'exercice, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

.

5. Montrer que $(P,Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

6. Établir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

.

7. a) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation précédente, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

c) En déduire $\phi(L_k) = k(k+1)L_k$

8. Déduire des questions précédentes que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. *On pourra s'intéresser à* $\langle \phi(L_k), L_h \rangle$ *avec* $h \neq k$ *dans* $[\![0, n]\!]$.

9. Racines de L_n
Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.
On souhaite démontrer que L_n est scindé à racines simples dans $]-1,1[$; pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que L_n change de signe sur l'intervalle $]-1,1[$ en p points (exactement) notés $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ tels que $-1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_p < 1$ et que $p \leqslant n-1$.

a) Justifier que $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$

b) On pose $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - c_i)$. En considérant le produit scalaire $\langle Q, L_n \rangle$ et en examinant le signe du produit QL_n sur $[-1,1]$, aboutir à une contradiction.

c) Conclure

10. Relation de récurrence

a) Justifier que $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et en déduire qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i.$$

b) Exprimer α_i à l'aide d'un produit scalaire et en déduire, pour $i \leqslant n-2$, $\alpha_i = 0$. *On pourra remarquer que* $\langle P, QR \rangle = \langle PQ, R \rangle$ *pour tous polynômes* P, Q *et* R.

c) Vérifier que XL_n^2 est impair et en déduire $\alpha_n = 0$.

d) Déterminer le coefficient de X^{n-2} dans L_n et en déduire

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$$

Partie II : fonction génératrice et expression intégrale

On considère la série entière de la variable t : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} L_n(x)t^n$.

On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

1. Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$.
On pourra raisonner par récurrence et utiliser **I.10**.

2. Pour $x \in [-1,1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$.

Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

3. Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$.

Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0.$$

4. En déduire que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n \,\mathrm{d}u$.

5. Soit $t \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$v_n(u) = t^n(\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n.$$

Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

6. Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$.

Dans les questions qui suivent, a désigne un réel strictement positif.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 0$.
On pourra utiliser un changement de variable défini par $v = \pi - u$.

8. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1 + a^2\cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.

9. En déduire que :

$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}.$$

10. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in [0,\pi]$, $L_n(\cos\theta) = w_n(\theta)$.

11. Justifier que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

12. Prouver que : $\forall x \in [-1,1]$, $R(x) = 1$.
On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, on a

$$(z^2 - 2xz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = 1.$$