

A.Couche anti-reflet. Quelques pistes pour démarrer...

Si on lit correctement la structure proposée, on a une superposition d'OPPH. pour chacune de ces OPPH, on peut utiliser les propriétés connues de l'OPPH en tenant compte du milieu et du sens de propagation. Dans le milieu d'indice n_i , la vitesse de phase est c/n_i , et donc le nombre d'onde est $k_i = n_i \omega / c$.

1) Le nombre de réflexions-transmissions aux deux dioptries est infini.

Dans la région 1, le premier terme est tout simplement l'onde incidente. Le second terme représente l'ensemble des ondes qui reviennent après diverses réflexions et transmissions ; prenons deux exemples :

a) réflexion de l'onde incidente en $z=0$.

b) transmission de l'onde incidente en $z=0$, puis réflexion en $z=d$, retour et transmission en $z=0$. L'onde finale revient dans la région 1.

2) On utilise la formule habituelle pour chaque OPPH. Attention au signe - pour les OPPH de retour.

$$\text{Région 1 : } \vec{B} = \frac{n_1 E_0}{c} \{ \exp(j(\omega t - k_1 z)) - p \cdot \exp(j(\omega t + k_1 z)) \} \vec{e}_y$$

$$\text{Région 2 : } \vec{B} = \frac{n_2 E_0}{c} \{ a \cdot \exp(j(\omega t - k_2 z)) - b \cdot \exp(j(\omega t + k_2 z)) \} \vec{e}_y$$

$$\text{Région 3 : } \vec{B} = \frac{n_3 E_0}{c} q \exp(j(\omega t - k_3(z - d))) \vec{e}_y$$

3a) Couche antireflet des verres de lunettes ou objectif d'appareil photo. Avion furtif pour éviter les radars.

3b) La partie droite est réelle, la partie gauche est une exponentielle complexe qui ne peut alors prendre que les valeurs -1 et +1. Il ne reste plus qu'à les tester. Seule la première valeur peut marcher et on obtient alors $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ et $\exp(j2k_2 d) = -1$ ce qui donne $2k_2 d = (2p+1)\pi$ avec p entier naturel.

3c) En l'absence de courants surfaciques aux dioptries, il y a continuité des composantes tangentielles des deux champs aux deux dioptries. Comme les deux champs sont tangentiels, on a donc continuité de ces champs en $z=0$ et $z=d$. On obtient les quatre relations suivantes :

$$1 + p = a + b$$

$$a \cdot \exp(-jk_2 d) + b \cdot \exp(+jk_2 d) = q$$

$$n_1(1 - p) = n_2(a - b)$$

$$n_2 \{ a \cdot \exp(-jk_2 d) - b \cdot \exp(+jk_2 d) \} = n_3 q$$

4 équations linéaires à 4 inconnues. On peut donc exprimer les valeurs de p , a , b et q . L'énoncé préfère prendre directement le cas particulier intéressant.

3d) On calcule $n_2 \approx 1,22$, soit $\lambda_2 = \lambda_0 / n_2 \approx 490 \text{ nm}$. La valeur minimale de d correspond à $p=0$ est $d_{\min} = \lambda_2 / 4 \approx 122 \text{ nm}$.

La relation précédente peut aussi s'écrire $\frac{4n_2 d_{\min}}{\lambda_0} = 1$

Une longueur d'onde λ sera éteint si $\frac{4n_2 d_{\min}}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ est un entier impair, soit $\lambda_k = \frac{\lambda_0}{k}$ avec k impair.

On obtient donc 200 nm puis des valeurs inférieures, qui ne sont pas dans le visible.

B. Réflexion transmission de la lumière lors d'un changement de milieu.**Cas de l'incidence normale.**

0) r_E : coefficient de réflexion en amplitude pour le champ électrique.

t_E : coefficient de transmission en amplitude pour le champ électrique.

On aurait peut-être tendance à écrire $r_E + t_E = 1$ qui est une loi de conservation de l'amplitude du champ électrique, mais cette loi n'existe pas.

1) Dans un milieu d'indice n , il suffit dans les calculs de remplacer c par c/n .

On a donc : $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ et $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$

2) Il suffit d'appliquer la formule habituelle en faisant attention au vecteur d'onde de l'onde réfléchie. On obtient :

Dans le milieu 1 : $\vec{B} = +\frac{n_1}{c} \vec{e}_z \wedge E_o \cdot \exp[j(\omega t - k_1 z)] \vec{e}_x - \frac{n_1}{c} \vec{e}_z \wedge r_E E_o \cdot \exp[j(\omega t + k_1 z)] \vec{e}_x$

soit : $\vec{B} = +\frac{n_1}{c} E_o \{ \exp[j(\omega t - k_1 z)] - r_E \cdot \exp[j(\omega t + k_1 z)] \} \vec{e}_y$

Dans le milieu 2 : $\vec{B} = +\frac{n_2}{c} \vec{e}_z \wedge t_E E_o \cdot \exp[j(\omega t - k_2 z)] \vec{e}_x = \frac{n_2}{c} t_E E_o \cdot \exp[j(\omega t - k_2 z)] \vec{e}_y$

3) Les champs proposés sont ceux d'ondes planes donc perpendiculaires à la direction de propagation, donc ils sont uniquement tangentiels au niveau de l'interface et ils sont continus à sa traversée. On a donc

$$\vec{E}(z = 0^-) = \vec{E}(z = 0^+) \quad \text{et} \quad \vec{B}(z = 0^-) = \vec{B}(z = 0^+)$$

$z < 0$: champs incident et réfléchis.

$z > 0$: champ transmis.

On écrit les relations en faisant $z=0$ et on simplifie par $\exp(j\omega t)$:

$$1 + r_E = t_E \quad \text{et} \quad n_1(1 - r_E) = n_2 t_E$$

On résoud et on sort $r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

On vérifie ici que les ondes réfléchies et transmises sont dans le même état de polarisation que l'onde incidente, en phase ou en opposition de phase (onde réfléchie pour $n_2 > n_1$) avec l'onde incidente.

4) Il n'y a ici aucun pb pour passer en réel car les amplitudes complexes sont en fait réelles et il suffit de remplacer $\exp j$ par \cos dans toutes les expressions.

Pour l'onde incidente : $\vec{E}_i = E_o \cdot \cos(\omega t - k_1 z) \vec{e}_x$ $\vec{B}_i = +\frac{n_1}{c} E_o \cdot \cos(\omega t - k_1 z) \vec{e}_y$

Pour l'onde réfléchie : $\vec{E}_r = r_E E_o \cdot \cos(\omega t + k_1 z) \vec{e}_x$ $\vec{B}_r = -\frac{n_1}{c} r_E E_o \cdot \cos(\omega t + k_1 z) \vec{e}_y$

Pour l'onde transmise : $\vec{E}_t = t_E E_o \cdot \cos(\omega t - k_2 z) \vec{e}_x$ $\vec{B}_t = +\frac{n_2}{c} t_E E_o \cdot \cos(\omega t - k_2 z) \vec{e}_y$

On peut donc calculer les 3 vecteurs de Poynting :

$$\vec{\Pi}_i = +\frac{n_1 E_o^2}{\mu_o c} \cdot \cos^2(\omega t - k_1 z) \vec{e}_z \quad \vec{\Pi}_t = +\frac{n_2 t_E^2 E_o^2}{\mu_o c} \cdot \cos^2(\omega t - k_2 z) \vec{e}_z \quad \vec{\Pi}_r = -\frac{n_1 r_E^2 E_o^2}{\mu_o c} \cdot \cos^2(\omega t + k_1 z) \vec{e}_z$$

On peut vérifier le sens de propagation de l'énergie pour les trois ondes.

5) On calcule maintenant :

$$\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\| = \frac{n_1 E_o^2}{2\mu_o c} \quad \|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\| = \frac{n_1 r_E^2 E_o^2}{2\mu_o c} \quad \|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\| = \frac{n_2 t_E^2 E_o^2}{2\mu_o c}$$

a) R : coefficient de réflexion en puissance. T : coefficient de transmission en puissance.

Comme on a une loi de conservation de l'énergie, on devrait donc avoir : $R + T = 1$.

b) On obtient alors : $R = r_E^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$ $T = \frac{n_2}{n_1} t_E^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

On vérifie bien $R+T=1$. On note aussi que R et T sont indépendants du sens de propagation de l'onde, de 1 vers 2 ou de 2 vers 1.

Pour l'interface air-verre, on calcule $R \approx 4\%$ et $T \approx 96\%$.

Pour une lentille on aura 2 dioptries donc le taux de transmission sera sensiblement de 92% et celui de réflexion de 8%. Si vous réfléchissez un peu, vous verrez que le problème se complique vite si on essaie d'être précis.

C. Notion d'absorption. Micro-onde dans l'eau.

Dans la formule, le terme responsable de l'absorption est $j\tau\omega$ dont la norme est $0,062 \ll 1$ donc le phénomène est relativement faible.

L'analyse de $\underline{\varepsilon}$ montre qu'il se situe dans le quatrième quadrant : partie réelle positive et partie imaginaire négative.

1) On calcule $\varepsilon' \approx 66,5$ et $\varepsilon'' \approx 4$ (sans unité)

2) On prend la relation de dispersion où on développe le calcul de k^2 . La séparation des parties réelle et imaginaire donne :

$$k'^2 - k''^2 = \varepsilon'(\omega/c)^2 \quad 2k'k'' = \varepsilon''(\omega/c)^2$$

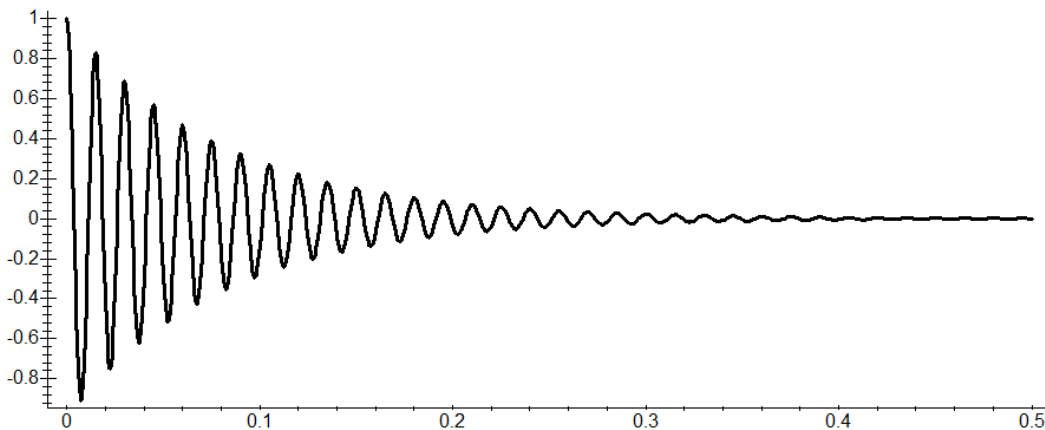
Système d'équations non-linéaire à deux inconnues k' et k'' . Difficile à gérer sauf si on prend l'hypothèse simplificatrice $k' \ll k''$ dont on donnera la signification physique à la question 3.

On obtient : $k' = \sqrt{\varepsilon'} \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right) \approx 420 \text{ m}^{-1}$ $k'' = \left(\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right) k' \approx 12,5 \text{ m}^{-1} \ll k'$

A posteriori, l'hypothèse simplificatrice apparaît justifiée.

3) La dépendance spatio-temporelle du champ électrique proposé est maintenant :
 $\exp(-k''z) \cdot \exp(j\omega t - k'z)$

Le second terme est un terme de propagation de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k' = 15 \text{ mm}$. La première exp est un terme d'atténuation de distance caractéristique $\delta = 1/k'' = 80 \text{ mm}$. Sur une distance de $0,5 \text{ m}$, à un instant donné, la valeur de l'amplitude du champ électrique réelle a qualitativement la forme suivante :



L'hypothèse $k'' \ll k'$ indique que, sur une oscillation de l'onde, l'absorption est relativement limitée.

4) Si l'amplitude du champ électrique décroît en $\exp(-k''x)$, l'amplitude du vecteur de Poynting va décroître en $[\exp(-k''x)]^2 = \exp(-2k''x)$.

$\exp(-2k''x) = 1/2$ donne une épaisseur $x = \ln(2)/(2k'') \approx 28 \text{ mm}$.

D. Ondes dans un plasma. C'est pratiquement le cours.

1) Les particules sont massives et chargées, il faut donc compter le poids et la force de Lorentz. On néglige les interactions entre particules.

Le PFD appliqué à un électron va donner : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) + m_e \vec{g}$.

A un proton : $m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v}_p \wedge \vec{B}) + m_p \vec{g}$

Typiquement, la norme de B est E/c et les particules restent dans le cadre de la mécanique classique (remarque sur E) soit donc $v \ll c$. La force magnétique a donc une norme $evB \ll ec(E/c) = eE$ très faible devant celle de la force électrique. Pour des champs usuels, le poids d'une particule chargée est aussi considérablement plus faible que la force électrique.

2 et 3) En négligeant le mouvement en l'absence de champ, de même que le poids et la force magnétique, on peut intégrer le PFD et on obtient :

$$\vec{v}_p = -j \frac{e}{m_p \omega} \vec{E}_0 \cdot \exp j(\omega t - kz) \text{ et } \vec{v}_e = j \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}_0 \cdot \exp j(\omega t - kz)$$

La densité de charge des protons est Ne, celle des électrons est N(-e). On a alors $\vec{J}_{elec} = Ne\vec{v}_p - Ne\vec{v}_e =$

$$\underline{\sigma} \cdot \vec{E} \text{ avec } \underline{\sigma} = -j \frac{Ne^2}{\omega} \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right) = \frac{\epsilon_0}{j\omega} (\omega_{pp}^2 + \omega_{pe}^2).$$

On calcule : $\omega_{pp} = 0,42 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \ll \omega_{pe} = 17,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$. On peut donc simplifier : $\underline{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}{j\omega}$.

4) Réécriture des quatre équations de Maxwell. Pour MA en complexe, on peut faire apparaître $j\omega$ dans le terme de conduction, ce qui est équivalent à une dérivation par rapport au temps.

On obtient la formule proposée.

5) On fait le rot de MF et on utilise la relation obtenue en A4. $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$. On obtient la même équation pour le champ magnétique.

On utilise MG et $M\phi$.

Comme il n'y a aucune dépendance en x et y, elles se simplifient en $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. Comme il s'agit d'une onde progressive, les dérivées temporelles sont aussi nulles et donc ces deux composantes sont des constantes, non liées à l'onde. Les champs électriques et magnétiques sont donc transverses.

6) Ici, on obtient $\Delta \vec{E} = -\underline{k}^2 \vec{E}$ et $\left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = -\omega^2 \vec{E}$ d'où $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)$.

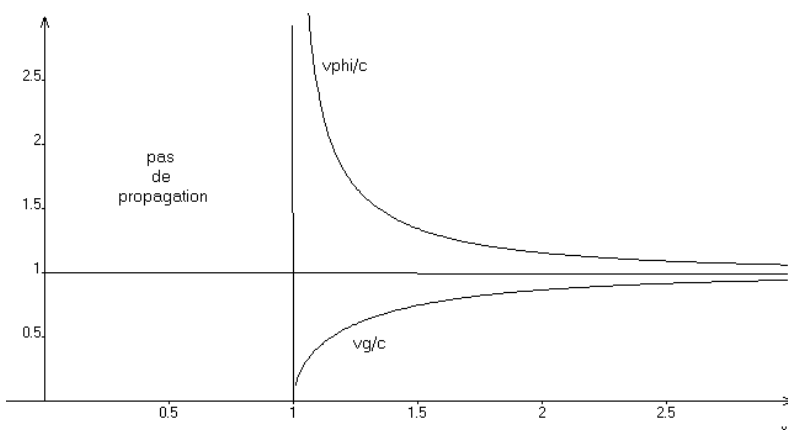
Le milieu est dispersif car la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ dépend de ω (si elle existe).

Pour $\omega < \omega_{pe}$, alors \underline{k}^2 est négatif et \underline{k} est alors imaginaire pur, ce qui correspond à une absorption sans propagation.

Ici, on calcule $N = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ particules.m}^{-3}$.

7) Si $\omega > \omega_{pe}$, on calcule $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}}$ et $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}$. Les deux formules ont même limite

commune c quand $\omega \gg \omega_{pe}$. Ci-dessous les graphes comparés de v_ϕ/c et v_g/c en fonction de $x = \omega/\omega_{pe}$.



8) La définition donne : $\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$

Si $\omega > \omega_{pe}$, on peut définir un indice réel positif $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} < 1$. Sinon, \underline{n} est purement imaginaire, on prend $\underline{n} = j\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1}$, l'autre solution créant une solution divergente dans le plasma.

9) Il y a un problème de notation ici. Il n'y a pas de flèche sur les \underline{E}_{oi} , \underline{E}_{or} et \underline{E}_{ot} .

En $z=0$, on a continuité du champ électrique car il est tangent soit donc : $\underline{E}_{oi} + \underline{E}_{or} = \underline{E}_{ot}$ (α)

On a aussi continuité du champ magnétique car il n'y a pas de courant surfacique (conductivité finie du plasma). On obtient alors la relation (β) : $\underline{E}_{oi} - \underline{E}_{or} = \underline{n} \underline{E}_{ot}$ avec les expressions gentiment fournies.

On déduit alors : $\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$.

10) Pour les indes incidente et réfléchie, qui se propagent dans l'air, on a une structure d'onde plane. On choisit l'origine des temps telle que $\underline{E}_{oi} = E_{oi}$ soit réelle. En repassant en réel sur les champs incidents et réfléchis, on a :

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cos(\omega t - k_o z) \vec{e}_x \quad \vec{B}_i = \frac{E_{oi}}{c} \cos(\omega t - k_o z) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r = \|\underline{r}\| E_{oi} \cos(\omega t - k_o z + \text{Arg}(\underline{r})) \vec{e}_x \quad \vec{B}_r = -\frac{\|\underline{r}\| E_{oi}}{c} \cos(\omega t - k_o z + \text{Arg}(\underline{r})) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi}_i = \vec{E}_i \wedge \frac{\vec{B}_i}{\mu_o} = \frac{E_{oi}^2}{\mu_o c} \cos^2(\omega t - k_o z) \vec{e}_z \quad \text{donc : } \langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \frac{E_{oi}^2}{2\mu_o c}$$

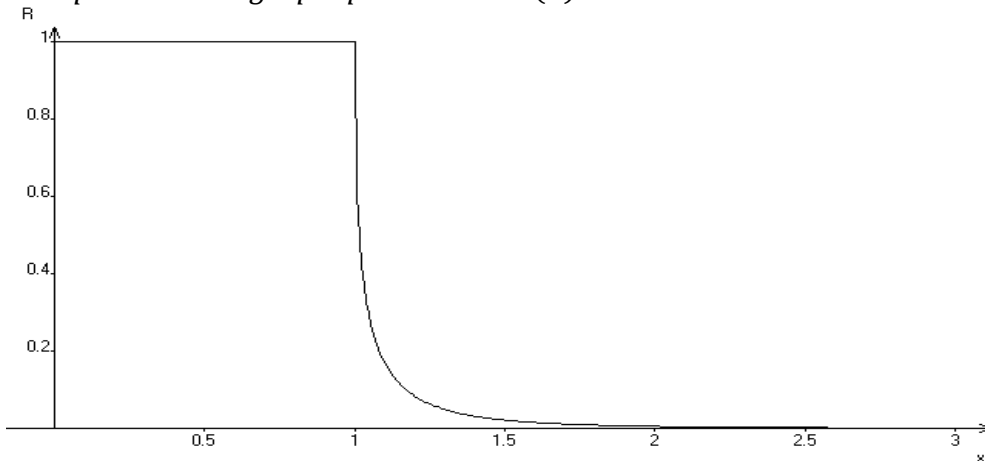
$$\vec{\Pi}_r = \vec{E}_r \wedge \frac{\vec{B}_r}{\mu_o} = -\frac{\|\underline{r}\|^2 E_{oi}^2}{\mu_o c} \cos^2(\omega t - k_o z + \text{Arg}(\underline{r})) \vec{e}_z \quad \text{donc } \langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle = \frac{\|\underline{r}\|^2 E_{oi}^2}{2\mu_o c}$$

On obtient alors : $\mathcal{R} = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle} = \|\underline{r}\|^2 = \left\| \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}} \right\|^2$.

11) Si $\omega < \omega_{pe}$, numérateur et dénominateur de \mathcal{R} sont complexes conjugués donc $\mathcal{R} = 1$ et l'onde est entièrement réfléchie. Application : transmission radio longue distance par réflexion sur l'ionosphère.

Si $\omega < \omega_{pe}$, le calcul de \mathcal{R} en fonction de $x = \omega / \omega_{pe}$ donne : $\mathcal{R} = \frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}}$

La représentation graphique de $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x)$ est :



Le coefficient de transmission est tout simplement le complémentaire par rapport à 1.

On note la chute très rapide du coefficient de réflexion, donc celui de transmission grimpe vite vers 1.

App : communication avec les satellites.

E. Proposition de correction qui n'a de sens que si vous faites les calculs.

Écrit en écoutant On The Night, Dire Straits, donc méfiance.

EA.

Il faut reprendre les deux relations de continuité :

On considère le plan $z=0$ chargé avec la densité surfacique σ (en $C.m^{-2}$) et parcouru par une densité de courant surfacique \vec{j}_s (en $A.m^{-1}$ attention danger).

Il y a des problèmes de discontinuités de champ à la traversée de tels plans. Le résultat suivant est général :

$$\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$$

Vous devez alors voir les deux propriétés suivantes :

a) A la traversée d'un plan quelconque, on a continuité des deux composantes tangentes du champ électrique.

b) A la traversée d'un plan quelconque, on a continuité de la composante normale du champ magnétique.

EB. Onde transverse électrique.

Questions 1, 2 et 3 déjà faites.

4) A partir de la solution de la question 3, on obtient : $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_n^2$ avec $\omega_n = \frac{n\pi c}{d}$

avec obligatoirement $\omega > \omega_n$.

On calcule alors : $v_\phi = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}} > c$ et $v_g = \frac{c^2}{v_\phi} < c$.

5) On prend la relation MF en utilisant la notation complexe : $\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{E}}) = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega \underline{\vec{B}}$

Avec le formulaire ou l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes, on sort :

$$\underline{\vec{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{\omega} \underline{E}_o(x) \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \\ j \frac{E'_o(x)}{\omega} \exp j(\omega t - kz) \end{bmatrix}$$

On remarque alors que, contrairement à l'onde plane, **le champ magnétique n'est pas transverse**. Il y a une composante non nulle selon la direction de propagation.

Rem : pour calculer le vecteur de Poynting, il faut d'abord repasser en réel. Si vous faites le calcul, vous verrez que B_z ne transporte en moyenne aucune énergie.

EC. Onde transverse magnétique.

1) En adoptant la notation complexe, MA s'écrit : $\overrightarrow{\text{rot}}(\underline{\vec{B}}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$.

Avec le formulaire ou l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes, on sort : $\underline{\vec{E}} = \begin{bmatrix} \frac{kc^2}{\omega} \underline{B}(x) \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \\ \frac{c^2}{j\omega} \underline{B}'(x) \exp j(\omega t - kz) \end{bmatrix}$

En $x=0$ et $x=d$, on a continuité de E_y et de E_z qui doivent donc être nulles à cause du métal parfait.

On obtient donc les CL : $\underline{B}'(0) = \underline{B}'(d) = 0$

2) Même méthode que dans l'exercice A.

Si $\beta < 0$, on a une combinaison linéaire d'exponentielles réelles. Les CL donnent la fonction nulle.

Si $\beta = 0$, on a alors $\underline{B}(x) = \lambda x + \mu$. Les CL donnent alors $\lambda=0$ et μ quelconque (c'est en fait l'onde plane, voir question 3).

Si $\beta = k_o^2$ avec $k_o > 0$, on a une combinaison linéaire d'exponentielles imaginaires. Les CL donnent alors $\sin(k_o d) = 0$ soit $k_o d = n\pi$ avec n entier non nul.

3) Vérifier qu'on obtient bien une onde plane.

4) Id partie B.

F. Proposition de solution.

L'onde se propage selon les z croissants. Elle est progressive donc non stationnaire, monochromatique, non plane, polarisée rectilignement selon la direction Oy.

1) On utilise directement l'équation d'onde pour le champ électrique en projection sur l'axe Oy.

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{donne} \quad \Delta E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) = - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 E_y + 0 - k^2 E_y = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 E_y$$

On obtient alors la relation proposée avec $\omega_o = \frac{\pi c}{a}$.

Cette relation unit les pulsations spatiales et temporelles : c'est une relation de dispersion.

Pour $\omega < \omega_o$, $k^2 < 0$ donc k devient imaginaire pur. Il faut éliminer une des solutions à cause de sa divergence. Il n'y a plus de propagation, on appelle cette onde une onde évanescente.

2) On calcule la vitesse de phase par : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} > c$

La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Pour calculer la vitesse de groupe, le plus simple est de différentier la relation de dispersion :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \text{qui donne} \quad \left(\frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_\phi \cdot v_g = c^2 \quad \text{d'où} : v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} < c$$

La vitesse de phase n'a pas de signification physique donc le résultat n'est pas gênant. Par contre, la vitesse de groupe est interprétée comme la vitesse de propagation de l'énergie, et elle doit être inférieure à c, ce qui le cas ici.

3) On prend l'équation MF, qui donne en complexe : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +jkE_o \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \exp[j(\omega t - kz)] \\ 0 \\ \frac{\pi}{a} E_o \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \exp[j(\omega t - kz)] \end{bmatrix} = -j\omega \vec{B}$$

Soit :

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{\omega} E_o \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \exp[j(\omega t - kz)] \\ 0 \\ -\frac{\pi}{j\omega a} E_o \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \exp[j(\omega t - kz)] \end{bmatrix}$$

4) Ici, il faut absolument passer en réel avant de continuer. On cherche donc les parties réelles.

$$\vec{E} = E_o \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{\omega} E_o \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ -\frac{\pi}{\omega a} E_o \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin(\omega t - kz) \end{bmatrix}$$

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0} \left[\begin{array}{c} -\frac{\pi}{\omega a} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) \cdot \sin(\omega t - kz) = -\frac{\pi}{4\omega a} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos^2(\omega t - kz) \end{array} \right]$$

Dont la valeur moyenne temporelle est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$

En moyenne, on a bien propagation de l'énergie selon les z croissants. Ce n'est pas vrai à un instant quelconque : l'énergie avance comme un serpent.

On peut maintenant définir la puissance surfacique moyenne $P_S = \frac{P}{ab} = \frac{k}{\omega} \cdot \frac{E_0^2}{4\mu_0}$

5) P_S est une puissance surfacique en $W.m^{-2}=J.s^{-1}.m^{-2}$; u_{em} est une énergie volumique en $J.m^{-3}$.

On peut donc écrire : $P_S=v.u_{em}$ où v est une vitesse.

Le calcul à vérifier donne $v=v_g$.

L'énergie avance à la vitesse moyenne v_g .