TD17 : Séries entières

Exercice 1 **(CCP PSI 2018)**
Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$. *(*)*

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2017)**
Domaine de définition et somme de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$. Calculer $f(1)$. *(*)*

Exercice 3 **(CCP PSI 2016)**
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 5 **(CCP MP 2015)**
DSE de $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2)$. *(*)*

Exercice 6 **(Centrale PC 2011)**
Donner le DSE de $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$. *(*)*

Exercice 7 **(CCINP PSI 2023)**
On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\, x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
2. On pose $\forall x \in \left]-R, R\right[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\, x^{2n+1}$.
   Donner une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients non constants vérifiée par f.
3. Rappeler l'expression de $\arcsin'$ puis résoudre l'équation différentielle. En déduire une expression simplifiée de la fonction f

Exercice 8 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1. Montrer que f est DSE sur $]-1,1[$
2. Montrer que f' est solution sur $]-1,1[$ de $(1-x^2)y' - xy = 1$
3. Déterminer les coefficients du DSE de f. *(*)*

Exercice 9 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
3. Montrer que la somme f de la série entière précédente vérifie $f'(x) = f(x)^2$.
4. En déduire la valeur de a_n. *(*)*

Exercice 10 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n (\ln n) z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$?
2. On pose $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.

3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \to 1^-$. On pensera à un produit de Cauchy de séries entières.

Indications

Exercice 1

Séparer les termes pairs et impairs.

Exercice 2

Décomposer $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ *en éléments simples puis diviser la somme en 3 ; pour* $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{2n+1}$ *distinguer* $x > 0$ *et* $x < 0$ *et changer de variable (chercher* $g(t^2)$ *par exemple).*

Exercice 5

$f(x)$ *se scinde en deux.*

Exercice 6

Cette fois, on ne peut pas scinder $f(x)$ *mais on peut le faire pour* $f'(x)$.

Exercice 8

3. *Pour simplifier les calculs, remarquer que* f' *est impaire.*

Exercice 9

4. *Déterminer* f *en se plaçant sur un intervalle* $]-h, h[$ *où* f *ne s'annule pas et en considérant la fonction* $1/f$.