I Lois, espérances et variances

Exercice 1 *[Solution]*
Une urne contient 3 boules B_1, B_2, B_3. On réalise une série de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée. Soit X la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro impair pour la première fois et soit Y la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir chacun des 3 numéros au moins une fois.

1. Précisez $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ et donner la loi de X.

2. Soit $k \in Y(\Omega)$. Déterminer $P(Y \geqslant k)$ et en déduire la loi de Y

3. Prouver que Y admet une espérance et calculer sa valeur

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2017) *[Solution]*
On dispose de 5 dés honnêtes et discernables. On les lance une première fois. On met de côté les dés qui ont amené un 6 et on relance les autres dés. On répète cette opération jusqu'à ce que tous les dés aient amené un 6. Soit X la variable aléatoire discrète égale au nombre de fois où on a lancé une poignée de dés quand le jeu s'arrête.

1. Donner la loi de X ; on pourra s'intéresser à sa fonction de répartition.

2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*
On dispose de n boules que l'on répartit aléatoirement dans 3 urnes. On note X le nombre d'urnes vides après cette répartition.

1. Donner $X(\Omega)$.

2. Donner la loi de X.

3. Donner $E(X)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 4 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Dans une urne avec N boules numérotées de 1 à N, on effectue n tirages avec remise. On note X_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée et $M_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$

1. Calculer $P(M_n \leqslant k)$ et en déduire la loi de M_n.

2. a) En utilisant $P(M_n = k) = P(M_n > k-1) - P(M_n > k)$, montrer que $E(M_n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} P(M_n > k)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(M_n)$ et interprétez.

3. a) Montrer que $E(M_n(M_n-1)) = 2\sum\limits_{k=1}^{N-1} kP(M_n > k)$ et calculer $V(M_n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(M_n)$ et interprétez.

Exercice 5 (IMT PSI 2019) *[Solution]*

1. n personnes lancent chacun une pièce équilibrée. Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.

2. On note X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'une personne n'ait pas le même résultat que les autres. Donner la loi, l'espérance et la variance de X

Exercice 6 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Trois personnes A_1, A_2 et A_3 rentrent dans un bureau de poste. Il n'y a que deux guichets donc A_3 attend son tour. On est à l'instant $t = 0$ et le temps est compté en entiers. L'entier X_i, le temps de service de la personne A_i suit une loi géométrique de paramètre p. Y est la variable aléatoire discrète comptant l'instant où A_3 peut être servie.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y ; on pourra travailler avec $P(Y > k)$.

2. Montrer que Y suit une loi usuelle.

3. Déterminer le temps moyen passé par A_3 au bureau de poste.

Exercice 7 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
La secrétaire d'une société appelle les n clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les $n - X$ clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité p et on note Y le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note Z le nombre de clients joints au cours des deux appels et $q = 1 - p$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$
2. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Déterminer $P(Z=0)$ et montrer que $P(Z=1)=np(1+q)q^{2n-2}$
4. Calculer $P(Y=h|X=k)$
5. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}=\binom{n}{j}\binom{j}{k}$ puis $P(Z=j)=\binom{n}{j}q^{2n-2j}(1-q^2)^j$.
   Quelle est la loi de Z ?

Exercice 8 (CCINP PSI 2023) *[Solution]*
Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Reconnaître $Y-1$ et en déduire $E(Y)$ et $V(Y)$
3. Déterminer la loi du couple (Y,Z).
4. Déterminer la loi et l'espérance de Z

Exercice 9 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
On étudie une succession de lancers d'une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » et Y est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile ».

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 10 (Mines-Télécom PSI 2019) *[Solution]*
On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un deuxième « pile » et on note X le nombre de « face » obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. X admet-elle une espérance ?

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*
On joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est $p\in]0,1[$. Le jeu se termine dès qu'on remporte deux parties consécutives. On note X la variable aléatoire discrète correspondant au numéro de la dernière partie jouée. Déterminer la loi de X.
indication : conditionner par le résultat de la première partie.

Exercice 12 (CCINP PSI 2019) *[Solution]*
Soient $p\in]0,1[$ et $q=1-p$

1. Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ et en déduire celui de $\frac{1}{(1-x)^r}$, pour $r\in\mathbb{N}^*$.
2. Pour $k\geqslant 0$, on pose $p_k=\binom{k+r-1}{k}p^rq^k$. Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.
3. On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p. On note X la variable aléatoire discrète qui donne le nombre de fois où la pièce a donné face avant l'obtention du $r^{\text{ème}}$ pile. Montrer que $p_k=P(X=k)$.

Exercice 13 *[Solution]*
Un élève passe un oral qui se déroule de la manière suivante : le jury pose une question ; si le candidat répond correctement alors le jury lui pose une nouvelle question (plus difficile) . L'oral s'arrête dès que le candidat ne répond pas correctement à l'une des questions posées. On suppose de plus, qu'à chaque étape, le fait que le candidat réponde correctement ou non ne dépend que de la question posée (donc pas de ce qui précède) et qu'en moyenne, la probabilité qu'il réponde correctement à la $n^{\text{ème}}$ question où $n\geqslant 1$ est de $\frac{1}{n}$. Soit X la variable aléatoire discrète égale au nombre de questions auxquelles le candidat a répondu correctement durant cet oral.

1. Déterminer la loi de X
   (Introduire $C_i=$« le candidat répond correctement à la $i^{\text{ème}}$ question »)
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
Le nombre d'enfants d'une famille N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque enfant à la probabilité $p\in]0,1[$ d'être une fille, indépendamment des autres. On note X le nombre de filles.

1. Déterminer la loi conjointe de N et X

2. Donner la loi de X.

Exercice 15 *[Solution]*
Un péage d'autoroute comporte α guichets . On désigne par N le nombre de voitures qui arrivent en une heure à ce péage. On admet que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On suppose que chaque conducteur choisit au hasard l'un des guichets et que les choix des conducteurs sont indépendants . On désigne par X la variable aléatoire discrète égale au nombre de voitures qui passent par le guichet 2 en 1 heure.

1. Déterminer $P_{(N=n)}(X = k)$

2. En déduire la loi de X. Calculer $E(X)$, $V(X)$.

Exercice 16 *[Solution]*
Une pièce amène pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On lance la pièce une infinité de fois. Soit X variable aléatoire discrète égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un premier pile. On définit une variable aléatoire discrète Y par : $Y = 0$ si on obtient le premier pile à un lancer impair, $Y = k \in \mathbb{N}^*$ si $(X = 2k)$ est réalisé

1. Donner la loi de X

2. Exprimer $(Y = 0)$ à l'aide des $(X = i)_{i\geq 1}$ et en déduire $P(Y = 0)$

3. Préciser la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 17 *[Solution]*
Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire successivement avec remise n boules. Soit X la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules blanches obtenues. On suppose que ce résultat est affiché sur un compteur qui fonctionne de la manière suivante : si $X \geqslant 1$ alors le compteur affiche la valeur de X (ie le nombre de boules blanches effectivement obtenues), si $X = 0$ alors le compteur affiche un nombre qu'il choisit au hasard entre 1 et n. On note Y la valeur affichée par le compteur.

1. Rappeler la loi de X et préciser $E(X)$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$, la loi de Y et son espérance.

Exercice 18 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*
Un joueur joue à un jeu où l'on tire un nombre n dans $\mathbb{N}^*$ avec une probabilité $p(n) = \dfrac{1}{2^n}$. Si n est pair le joueur gagne n euros, si n est impair le joueur perd n euros.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne à un tirage du jeu ?

2. G est la variable aléatoire qui vaut le gain du joueur (éventuellement négatif).
Calculer $E(G)$, $V(G)$.

Exercice 19 *[Solution]*
Une urne contient des boules numérotées portant les numéros 1, 2,. . ., r. On suppose que, pour $i \in [\![1, r]\!]$, l'urne contient i boules portant le numéro i. On réalise une succession de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule dans l'urne, cette boule porte un certain numéro, noté k ; on la remet dans l'urne et on remplace chacune des boules de l'urne ayant un numéro $< k$ par une boule portant le numéro k (si on tire la boule B_1, on la remet simplement dans l'urne). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire discrète égale au numéro de la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage. Soit Z la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule portant le numéro r.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que $E(X_1) = \dfrac{2r + 1}{3}$.

2. a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{(X_n=r)}(X_{n+1} = r)$ et montrer que $P_{(X_n<r)}(X_{n+1} = r) = \dfrac{2}{r + 1}$

b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = r)$ et $P(X_n = r)$.

c) Déterminer alors $P(X_n = r)$

3. a) Préciser $Z(\Omega)$ et calculer $P(Z = 1)$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geqslant 2$. Montrer que $(Z = k) = (X_k = r) \cap (X_{k-1} < r)$

c) Montrer que $P(Z = k) = \dfrac{2}{r + 1}\left(\dfrac{r - 1}{r + 1}\right)^{k-1}$ pour $k \geqslant 2$.

d) Prouver que $E(Z)$ et $V(Z)$ existent et calculer leurs valeurs.

Exercice 20 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit n un entier naturel non nul. On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et 1 boule blanche. On procède à un tirage sans remise. On note X le rang d'apparition de la boule blanche, Y le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2. Exprimer Y en fonction de X. Donner son espérance.

Exercice 21 **(AADN PSI 2015)** *[Solution]*
On admet que pour $q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} p^{k-q} = \frac{1}{(1-p)^{q+1}}$ pour $p \in]0,1[$.
Pour une expérience, on place une bactérie dans une enceinte fermée à $t = 0$. Toutes les secondes à partir de $t = 1$, on envoie un rayon laser dans l'enceinte. Chaque tir de laser est indépendant du précédent, et la probabilité du laser de toucher la bactérie est égale à $p \in]0,1[$. La bactérie ne peut survivre qu'à r tirs de laser avec $r \in \mathbb{N}^*$. Soit X la variable aléatoire discrète qui compte la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 22 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivent $\mathscr{B}(p)$ et sont mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. N est une variable aléatoire discrète , indépendante des X_i, telle que $1 + N \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.
3. Déterminer $P(S_N = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$; on note T la variable aléatoire discrète égale au plus petit rang n tel que $X_n = X_{n+1} = 1$. On note A_n : « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 0$ » et B_n :« on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 1$ ». On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

1. Calculer $P(T = 0)$, $P(T = 1)$ et $P(T = 2)$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $P(T = n) = \dfrac{F_n}{2^{n+2}}$ où (F_n) est la suite de Fibonacci ($F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$)

Exercice 24 *[Solution]*
Une boîte A contient 2 jetons discernables portant le numéro 0, une boîte B contient 2 jetons discernables portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte puis on les change de boîte. On recommence cette opération n fois. Soit X_n la variable aléatoire discrète égale à la somme des numéros des jetons contenus dans A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ échange. On convient que $X_0 = 0$.

1. Pour $n \geqslant 2$ exprimer $P(X_n = 0)$ à l'aide de $P(X_{n-1} = 0), P(X_{n-1} = 1)$ et $P(X_{n-1} = 2)$
2. Procéder de même pour $P(X_n = 2)$ puis pour $P(X_n = 1)$
3. En déduire la loi de X_n.

Exercice 25 *[Solution]*

1. On lance N dés honnêtes et discernables. Soit X_1 la variable aléatoire discrète égale au nombre de dés qui amène la face 6. Donner la loi de X_1, préciser $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On relance maintenant les dés qui n'ont pas amené 6 au lancer précédent et on note X_2 le nombre de dé relancés ayant amené 6 après ces deux opérations.
   a) Déterminer $X_2(\Omega)$
   b) Calculer $P_{(X_1=i)}(X_2 = k)$
   c) Déterminer alors la loi de X_2 puis donner $E(X_2)$. Ne pouvait-on prévoir ce résultat ?
3. Pour $j \geqslant 2$, la $j^{\text{ème}}$ opération consiste à relancer les dés qui n'ont pas amené 6 lors des $j-1$ précédents lancers. On note X_j le nombre de 6 obtenus après cette $j^{\text{ème}}$ opération. Déterminer la loi de X_j.

Exercice 26 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Dans un ascenseur à p étages se trouvent n personnes, les n personnes doivent descendre à l'un des p étages de manière équiprobable et indépendamment les uns des autres. Soit X la variable aléatoire discrète qui est le nombre d'arrêts. Soit la variable aléatoire discrète X_i qui est le nombre de personnes qui descendent à l'étage i.

1. Quelle est la loi de X_i ?
2. Déterminer l'espérance de X. (*indication : compter plutôt le nombre d'étages sans arrêt*)
3. Donner la limite de $E(X)$ quand p tend vers $+\infty$.

Exercice 27 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On suppose X et Y indépendantes.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 0 \end{cases}$
Trouver la loi de Z, puis son espérance.

Exercice 28 *[Solution]*
A la fête foraine, un jeu est constituée d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle plonge un bras articulé qui en extrait simultanément une poignée contenant un nombre de boules qu'il choisit au hasard entre 0 et n. Soit X la variable aléatoire discrète égale à la somme des numéros obtenus.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_k = \begin{cases} k & \text{si on tire le numéro } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $\dfrac{X_k}{k} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pourra introduire $A_i =$« on a tiré une poignée contenant i boules ».
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 29 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$; on pose $Y = \begin{cases} \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer $E(Y)$.
3. Déterminer $E(Y^2)$

Exercice 30 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes telles que $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_n = 1) = 1 - p$ et $P(X_n = -1) = p \in]0, 1[$. On pose $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $E(Z_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} E(Z_n)$.
2. Déterminer la loi de Z_n.
   indication : développer $(p + (1 - p))^n$ et $(p - (1 - p))^n$
3. À quelle condition sur p, Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?
   indication : trouver une condition nécessaire sur p avec l'espérance.

Exercice 31 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k = (X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=1}^{p} A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geqslant 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que $P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T = n))_{n\in\mathbb{N}}$
3. Déterminer l'espérance de T

Exercice 32 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$?
2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n.
3. Déterminer les lois de D_n et X_n.
4. Calculer l'espérance de X_n.

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Une marche aléatoire discrète sur une droite débute en $t = 0$ à l'origine ; à chaque instant, la probabilité d'aller à droite (+1 case) est p, celle d'aller à gauche (−1 case) est $1 - p$. On note X_n la variable aléatoire discrète donnant la position après n déplacements.

1. Déterminer la loi de X_n.
indication : introduire V_n *qui vaut* 0 *ou* 1 *selon que le déplacement se fait vers la droite ou vers la gauche et relier* $X_{n+1} - X_n$ *à* V_{n+1}.

2. Calculer $E(X_n)$; pour quelle valeur de p, X_n est-elle centrée ?

3. Calculer $V(X_n)$.

Exercice 34 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Une urne contient n boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement et avec remise. Soit Y_r la variable aléatoire discrète qui donne le rang du tirage au bout duquel $B_1, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. a) Déterminer la loi, l'espérance, la variance de Y_1.

b) Préciser $Y_r(\Omega)$. Que valent $P(Y_r = r)$ et $P(Y_r = r+1)$?
indication : dénombrement.

2. On fixe r. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire discrète représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi, $W_r = Y_r$). On pose $X_1 = W_1$ et $X_i = W_i - W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.

a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
indication : interpréter X_i.

b) En déduire l'espérance de Y_n. Trouver un équivalent de $E(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 35 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement N boules rouges. On tire successivement dans l'urne de la façon suivante : si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte ; si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne. On note X_p le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du $p^{\text{ème}}$ tirage. On pose $X_0 = N$. On note Y le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y = 0$ si ce rang n'existe pas)

1. Montrer, pour $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $P(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N} P(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N} P(X_n = k+1)$

2. En déduire une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$

3. Donner $E(X_n)$ en fonction de n et N et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n \geqslant 1)$ et de $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{E(X_n)}{N}$.

4. Montrer que $(Y = 0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $P(Y = 0)$.

Exercice 36 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons de manière aléatoire (toutes les poignées, y compris la poignée vide sont tirées de façon équiprobables). Déterminer l'espérance de S, la somme des valeurs des jetons tirés.
indication : ne pas chercher la loi de S *mais la relier aux* X_i *tels que* $X_i = 1$ *si le jeton* i *est tiré.*

Exercice 37 **(CCP PSI 2021)** *[Solution]*
On considère n lancers indépendants d'un dé équilibré. On note X_n la valeur obtenue au $n^{\text{ème}}$ lancer.

1. Trouver la loi de X_n et sa fonction de répartition F.

2. On note $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Déterminer la loi et la fonction de répartition F_n de Y_n.

3. Étudier la convergence uniforme de (F_n).

4. Mêmes questions avec $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Exercice 38 **(CCP PC 2015)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}(n)$ et $\mathscr{B}(p)$. On pose $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ X & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A soit la matrice d'un projecteur non nul ?

Exercice 39 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{B}(p)$. On pose $U = {}^t\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{pmatrix}$ et $M = U\,{}^tU$.

1. Déterminer la loi suivie par $\mathrm{rg}(M)$.

2. Exprimer, à l'aide de $\mathrm{Tr}(M)$, la probabilité que M soit une matrice de projection.

3. Déterminer la probabilité que M soit la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 40 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A vérifie (P) si $\mathcal{X}_A = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$

1. Donner des exemples de matrices vérifiant (P)

2. X_1, X_2, X_3 sont trois variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A vérifie (P) ?

II Lois sans expérience

Exercice 41 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $\alpha \geqslant 0$ et $p_k = e^{-2}\dfrac{4^k(1+\alpha k)}{(2k)!}$.

1. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(2)$. Déterminer la loi de $T = 1 + Y$.

2. Déterminer α pour qu'il existe une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = k) = p_k$.
Calculer $E(X)$.

Exercice 42 **(CCP PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire discrète X sur $[\![0, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

1. Trouver α, dépendant de k et n, tel que $\dbinom{n}{k} = \alpha\dbinom{n-1}{k-1}$.

2. En déduire la valeur de a pour laquelle on peut définir une telle variable aléatoire discrète X.

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 43 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $p \in]0,1[$ et $p_k = p^2k(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = p_k$

2. Montrer l'existence et calculer la valeur de $E(X-1)$ et $E((X-1)(X-2))$

3. Montrer l'existence et calculer la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 44 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*

1. Soit $r > 0$. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = r\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^r \,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.

Exercice 45 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et qu'il existe $a > 0$ vérifiant $P(X = n) = \dfrac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$.

1. Vérifier qu'on peut bien définir une telle variable aléatoire discrète .

2. On note Y une autre variable aléatoire discrète , indépendante de X, qui suit la même loi que X et on pose $Z = X + Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Déterminer $E\left(\dfrac{1}{1+Z}\right)$ puis $E\left(\dfrac{X}{1+Z}\right)$.

3. On note cette fois $T = \min(X, Y)$.

a) Déterminer $P(X \leqslant n)$.

b) En déduire la loi de T.

Exercice 46 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, qui admettent une variance et telles que $Z = X + Y + 1$ suive $\mathscr{G}(p)$

1. Déterminer l'espérance de X.

2. Déterminer la fonction génératrice de X.

3. Déterminer la loi de X

III Espérance et théorème de transfert

Exercice 47 *[Solution]*

1. Soit X une variable aléatoire discrète suivant $\mathscr{B}(n,p)$; on pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Calculer $E(Y)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On pose $Z = (-1)^X$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 48 (CCP PSI 2015) *[Solution]*
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 49 (CCP PSI 2015) *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $Y = 1 + X^2$. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer la probabilité de l'événement $2X < Y$.
3. Calculer la probabilité que X soit paire.
4. X a-t-elle plus de chance d'être paire ou impaire ?

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*

1. 2 variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y suivent $\mathscr{G}(p)$. Donner la loi de $T = \min(X,Y)$, son espérance et sa fonction génératrice.
2. Montrer que $\dfrac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance et la calculer.

IV Couple de variables

Exercice 51 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenue. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $(k,n) \in [\![1,6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X=k, N=n)$.
3. Calculer $P(X=k)$. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 52 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
On étudie succession de lancers d'une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » ($(X=k)$ si pile au lancer k et face au lancer $k+1$). Y est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile »

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 53 *[Solution]*
Soit N une variable aléatoire discrète telle que $N \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Soit S la variable aléatoire discrète telle que $\forall i \in [\![0,n]\!]\,, S_{(N=i)} \hookrightarrow \mathscr{B}(i,\gamma)$.

1. Déterminer $S(\Omega)$
2. Déterminer la loi conjointe de S et N.
3. Prouver que $S \hookrightarrow \mathscr{B}(m,r)$ avec m et r à préciser.

Exercice 54 (Mines-Télécom PSI 2019) *[Solution]*
$X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y_{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

1. Donner la loi du coule (X,Y).
2. Déterminer la loi de Y
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.

1. On pose $S = X+Y$, trouver la loi de S.
2. Reconnaître la loi de X sachant $(S=k)$.

3. Soit Z une variable aléatoire discrète , mutuellement indépendante de X et Y, telle que $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, P(Z>n+1|Z>n)=1-p$, reconnaître $1+Z$.

4. Calculer $P(S=Z)$

Exercice 56 **(TPE-EIVP PSI 2019)** *[Solution]*
Soient X et Y suivant $\mathscr{G}(p)$ indépendantes. Déterminer la loi de $\min(X,Y)$.

Exercice 57 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes avec $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$. On pose $U=\max(X,Y)$ et $V=\min(X,Y)$ et on note $q=1-p$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V)

2. Déterminer les lois de U et V.

Exercice 58 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p\in]0,1[$ tels que

$$P(X=k,Y=n)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}p(1-p)^n & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$$

1. Déterminer la loi de Y.

2. Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$ pour $|x|<1$ et en déduire la loi de X

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 59 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient α,β deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P(X=i,Y=j)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0\leqslant j\leqslant i\\ 0 & \text{si } j>i\end{array}\right.$

1. Déterminer les lois de X et Y

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. On pose $Z=X-Y$; déterminer la loi de Z

4. Déterminer $P(Y=j|Z=n)$ et conclure

Exercice 60 *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que : $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$ et $\forall(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, $P[(X=i)\cap(Y=j)]=\lambda\dbinom{n}{i-1}\dbinom{n}{j-1}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de λ.

2. Déterminer la loi de X et celle de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. On pose $Z=X-1$. Déterminer la loi de Z. En déduire $E(X)$ et $V(X)$

4. Calculer $E(XY)$ puis calculer $E\left(2^{X-Y}\right)$.

Exercice 61 *[Solution]*
Soit $a>0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

1. Déterminer λ pour qu'il existe 2 variables aléatoires discrètes X et Y telles que $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et, pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P(X=i,Y=j)=\lambda\times\dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$

2. Déterminer la loi de X et la loi de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi de $S=X+Y$.

Exercice 62 **(AADN PSI 2015)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $P(X=i,Y=j)=\dfrac{a}{2^{i+1}j!}$ où $a>0$.

1. Déterminer a.

2. Déterminer les lois de X et de Y ; sont-elles indépendantes ?

3. Vérifier que $1+X$ suit une loi géométrique ; en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Déterminer $P(X=Y)$ et en déduire la probabilité que $\begin{pmatrix}X&1\\0&Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 63 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X=i)=\dfrac{i}{2^{i+1}}$ pour $i \geqslant 1$. On considère une urne qui contient X boules numérotées de 1 à X ; on tire une boule au hasard dans cette urne et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier qu'un telle variable aléatoire X existe.
2. Calculer $E(X)$.
3. Donner la loi conjointe de X et Y.
4. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

Exercice 64 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Un élément chimique émet des électrons. On note N la variable aléatoire discrète égale au nombre d'électrons émis sur une période ; on suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Un électron émis est efficace avec une probabilité $p \in]0,1[$; on note X le nombre d'électrons efficaces émis.

1. Calculer $P(X=i|N=j)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi conjointe de X et N.
3. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
4. On note Y le nombre d'électrons inefficaces. Calculer $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

Exercice 65 *[Solution]*
Une pièce amène « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$. Une personne lance cette pièce jusqu'à obtenir pile. On désigne par N le nombre de lancers nécessaires. Si pile est apparu au $n^{\text{ème}}$ lancer (ie si l'événement $(N=n)$ est réalisé) alors la personne relance la pièce n fois et on appelle X le nombre de piles obtenus au cours de ces n nouveaux lancers

1. Préciser la loi de $X_{(N=n)}$.
2. Déterminer la loi du couple (X,N).
3. Déterminer la loi de X (séparer les cas $X=0$ et $X=k$ où $k \geqslant 1$))
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 66 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Une pièce amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce une infinité de fois. On appelle « série » toute succession de lancers donnant le même côté de la pièce, succession interrompue par l'obtention de l'autre côté de la pièce. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire discrète égale à la longueur de la première série (resp. celle de la deuxième). Ainsi, par exemple, si on a obtenu : PPPFFP etc... alors $X_1=3$ et $X_2=2$

1. a) Déterminer la loi de X_1.
   b) Prouver que $E(X_1)$ existe, calculer $E(X_1)$ et vérifier $E(X_1) \geqslant 2$.
2. a) Déterminer la loi du couple (X_1,X_2)
   b) En déduire la loi de X_2
   c) Calculer $E(X_2)$ puis calculer $V(X_2)$
3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 67 *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et soit Y définie par $\begin{cases} Y=0 & \text{si } X=0 \\ Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) & \text{si } X=n \geqslant 1 \end{cases}$

1. Déterminer $P_{(X=0)}(Y=0)$ puis $P_{(X=0)}(Y=i)$ pour $i \geqslant 1$.
   Calculer $P_{(X=n)}(Y=k)$ pour $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.

Exercice 68 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(a)$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

1. Calculer l'espérance et la variance de U qui vaut 0 si $X=0$ et Y si $X=1$.
2. $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ est indépendante de X et Y. Calculer l'espérance et la variance de V qui vaut Y si $X=0$ et Z si $X=1$.

Exercice 69 *[Solution]*
Soient n boîtes telles que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la boite B_k contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit au hasard une boîte et un jeton dans cette boîte. On désigne par X (resp. Y) le numéro de la boîte choisie (resp. le numéro du jeton tiré).

1. Donner la loi de X.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y). Retrouver alors la valeur de $P(X = k)$.

3. Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$.

4. Montrer que $P(X = Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X = Y)$.

Exercice 70 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 71 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$

2. On pose $T = \max(X, Y)$ et $U = \min(X, Y)$; exprimer $T + U$, $T - U$ et TU en fonction de X et Y.

3. Déterminer $\mathrm{Cov}(T, U)$

4. T et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 72 *[Solution]*
Soit X et Y des variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On pose $V = |X - Y|$ et $M = \min(X, Y)$

1. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

a) Déterminer la loi du couple (V, M)

b) En déduire les lois de V et M.
V et M sont-elles indépendantes ?

2. On suppose maintenant que X et Y suivent une même loi et que V et M sont indépendantes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = n) = P(Y = n)$ et on suppose $p_n > 0$.

a) Calculer $P[(V = 1) \cap (M = n)]$ et $P[(V = 0) \cap (M = n)]$ en fonction des $(p_i)_{i\geqslant 1}$.

b) Déterminer p_n.

3. Quelle conclusion peut-on tirer ?

Exercice 73 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
On dit qu'une variable aléatoire discrète est symétrique si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, P(X = n) = P(X = -n)$

1. Montrer que si X et Y sont indépendantes et symétriques alors $X + Y$ est symétrique.

2. Généraliser au cas de n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

V Variances et covariances

Exercice 74 *[Solution]*
Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 10. Pour $i \in [\![1, 10]\!]$ la proportion de jetons portant le numéro i est p_i, où $p_i \in]0, 1[$. On tire successivement avec remise n jetons dans cette urne et N_i désigne le nombre de jetons obtenus portant le numéro i

1. Déterminer la loi de N_i pour $i \in [\![1, 10]\!]$.

2. Soit $(i, j) \in [\![1, 10]\!]^2$ avec $i \neq j$. On pose $Z_{i,j} = N_i + N_j$. Que représente $Z_{i,j}$? En déduire la loi de $Z_{i,j}$ puis calculer $\mathrm{Cov}(N_i, N_j)$ pour $i \neq j$.

Exercice 75 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soient X et Y suivant $\mathscr{B}(p)$ et $\mathscr{B}(q)$. On suppose $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

1. Montrer que $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$.

2. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 76 *[Solution]*
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$

1. Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$. S et D sont-elles indépendantes ?

2. a) Préciser $S(\Omega)$

b) Calculer $P(S = k)$.

Exercice 77 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes suivant $\mathscr{G}(p)$.

1. Donner la loi $D = |X - Y|$.
2. On pose $T = \max(X, Y)$ et $U = \min(X, Y)$. Exprimer $T + U$, $T - U$ et UT en fonction de X et Y et en déduire $\mathrm{Cov}(T, U)$.

Exercice 78 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$. On pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X = Y) = \dfrac{p}{2-p}$; en déduire la probabilité que M soit inversible.
2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de M. Déterminer la covariance de λ_1 et λ_2 ; sont-elles indépendantes ?

Exercice 79 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète ; on dit que X vérifie la propriété D si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$, mutuellement indépendantes et de même loi, telle que $X = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors X vérifie D.
2. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \in [a, b]$ $(a < b)$
   a) Montrer que $V(X) \leqslant (b-a)^2$.
   indication : commencer par vérifier que $a - b \leqslant X - E(X) \leqslant b - a$
   b) Montrer que si X vérifie D alors $V(X_i) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{n^2}$ (avec $X_1, \dots, X_n$ données par D)
   c) Que peut-on en déduire pour X ?
   indication : montrer que si $V(X) = 0$ alors X est constante presque surement

Exercice 80 **(AADN PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires centrées admettant une variance et $V_0 = \inf\{V(X), X \in \mathcal{E}\}$.

1. Justifier l'existence de V_0.
2. On suppose que $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ et $\dfrac{X_1 + X_2}{2} \in \mathcal{E}$. Montrer que si $V(X_1) = V(X_2) = V_0$ alors $X_1 = X_2$ presque sûrement.
   indication : commencer par montrer que $V((X_1 + X_2)/2) = V_0$ aussi.

Exercice 81 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Soient f et g deux applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geqslant 0$; on pourra introduire une variable Y, indépendante de X, de même loi que X et montrer $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y)) \geqslant 0$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites croissantes. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$

VI Inégalités

Exercice 82 **(Mines-Télécom série 2 PSI 2023)** *[Solution]*
On effectue n lancers de deux dés D_1 et D_2. Une victoire correspond à un lancer où la valeur de D_1 est strictement supérieure à la valeur de D_2. On note X le nombre de victoire au cours des n lancers.

1. Donner la loi de X
2. Espérance et variance de X ?
3. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
4. On note $p_n = P\left(0.9 \leqslant \dfrac{X}{E(X)} \leqslant 1.1\right)$. Déterminer une majoration de p_n.

Exercice 83 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X suit une loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que : $P(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$; $P(|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$; $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 84 *[Solution]*
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Exercice 85 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant $\mathscr{B}(p)$, $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et $M_n = \dfrac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$.

1. Citer la loi faible des grands nombres.

2. Les Y_i sont elles indépendantes ?

3. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

4. En déduire $P(|M_n - 2p| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\varepsilon > 0$.

Exercice 86 **(Centrale PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier l'existence et calculer $E\left(e^{x\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a) Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Justifier que f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ un maximum $M_\alpha > 0$.

b) Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant 2e^{-nM_\alpha}$

Exercice 87 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, $Y_n = U_n U_{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Donner la loi de Y_n.

2. Pour quels (n, m) les variables Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $E(Y_n Y_m)$ et $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

4. Calculer $V(S_n)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

Exercice 88 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$; montrer que, pour $u \in \mathbb{R}$, e^{uN} admet une espérance et la calculer.

2. On pose $h(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - x$. Montrer que $\displaystyle\inf_{u>0} E\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)}\right) = e^{-\lambda h(y)}$.

3. On fixe $y > 0$; montrer que $P(N \geqslant (1 + y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)}$.

Exercice 89 **(Centrale PSI 2017)** *[Solution]*
Soit une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, d'espérance nulle, suivant la même loi et prenant un nombre fini de valeurs.

1. Montrer que $\forall\varepsilon > 0, h_+(\varepsilon) = \displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left((t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1}))\right) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$; montrer que $P\left(\dfrac{1}{n}S_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(\varepsilon)}$

puis que $\forall(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(S_n \geqslant n\varepsilon)P\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_{n+k} \geqslant m\varepsilon\right) \leqslant P(S_{n+m} \geqslant (n + m)\varepsilon)$.

VII Fonctions génératrices

Exercice 90 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit a un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$

1. Déterminer a.

2. X admet-elle une espérance, une variance ?

3. Expliciter la série génératrice de X.

Exercice 91 **(TPE-EIVP PSI 2015)** *[Solution]*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier par le calcul que $\sum_{k\geqslant 1} P(X=k)=1$.
2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?
3. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ?

Exercice 92 **(CCP PSI 2023)** *[Solution]*

1. $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}$, $P(X\leqslant n)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$? En déduire la probabilité que X soit paire.
4. Y, indépendante de X suit une loi uniforme sur $\{1,2\}$. Calculer la probabilité que XY soit pair.

Exercice 93 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. Donner le DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. À quelle condition sur r peut-on définir une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $P(X=n)=\dfrac{(2n)!r}{2^{3n}(n!)^2}$?
3. Lorsque cette condition est réalisée, calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 94 *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Déterminer la fonction génératrice de $2X$ et de $X+1$.

Exercice 95 *[Solution]*
Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction génératrice est : $G_X(t)=\dfrac{t}{2-t^2}$. Déterminer les lois de X et de $Y=X/2$.

Exercice 96 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et $S=X+Y$

1. Donner la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et G_Y
2. Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ et $Y\sim\mathscr{B}(m,p)$, donner la loi de S
3. Même question avec $X\sim Y\sim\mathscr{G}(p)$

Exercice 97 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi. On suppose que $Z=1+X+Y\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

1. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p.
2. Calculer $G_X(t)$ et en déduire la loi de X.

Exercice 98 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*
On effectue n tirages indépendants dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X la variable aléatoire discrète égale au nombre de 1 tirés.

1. Exprimer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Soit k un entier strictement positif. Exprimer la limite de $P(X=k)$ quand n tend vers l'infini.
3. On pose $q(n)$ la probabilité que X soit pair et $p(n)$ celle que X soit impair. Exprimer $p(n)+q(n)$ et $p(n)-q(n)$. En déduire la limite de $p(n)$ quand n tend vers l'infini.
4. Soit Y la variable aléatoire discrète égale au nombre de 2 tirés. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 99 *[Solution]*
Quelle est la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi binomiale de paramètres (n,p) et (m,p) ? *(utiliser la fonction génératrice)*
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Exercice 100 *[Solution]*
Dans une famille donnée, on appelle F et X, les variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant respectivement le nombre de filles et le nombre d'enfants, de la famille. On suppose qu'à chaque naissance dans une famille, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

1. Démontrer que, si G_F et G_X sont les fonctions génératrices de F et X, alors $G_F(t) = G_X\left(\dfrac{t+1}{2}\right)$

2. Donner la loi de F dans les cas suivants : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ puis $X+1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exercice 101 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Montrer que si $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $P(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$ puis étudier le cas d'égalité.
indication : $G_X(1) = 1$.

Exercice 102 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

1. Calculer $G_X^{(k)}(1)$ en fonction de $u_k(X) = E\left(\displaystyle\prod_{p=0}^{k-1}(X-p)\right)$.

2. Montrer que $P(X = j) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\sum_{k=j}^{n}(-1)^{j-k}\dfrac{u_k(X)}{(k-j)!}$.

Exercice 103 *[Solution]*

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On appelle succès le fait d'obtenir un 6.

1. On note T_n le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un $n^{\text{ème}}$ succès. Déterminer la loi de T_n, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

2. On note Y_n le nombre d'échecs précédant le $n^{\text{ème}}$ succès. Déterminer la loi de Y_n, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$; $X(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

2. Si Z_i est le numéro de la boule tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage, $(Y\geqslant k)=\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,2\})\right]\cup\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,3\})\right]\cup\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{2,3\})\right]$ mais les réunions ne sont pas disjointes. $P\left(\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,2\})\right]\cup\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,3\})\right]\right)=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}-P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(Z_i=1)\right)=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$. On procède de même pour la seconde réunion avec cette fois $\left(\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,2\})\right]\cup\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{1,3\})\right]\right)\cap\left[\bigcap_{i\leqslant k-1}(Z_i\in\{2,3\})\right]=\left[\bigcap_{i=1}^{k-1}(Z_i=2)\right]\cup\left[\bigcup_{i=1}^{k-1}(Z_i=3)\right]$. Au final $P(Y\geqslant k)=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}-3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ si $k\geqslant 2$ et $P(Y\geqslant 1)=1$. On a ensuite $P(Y=k)=P(Y\geqslant k)-P(Y\geqslant k+1)$

3. $E(Y)=\sum_{k\geqslant 1}P(T\geqslant k)=1+3\sum_{k\geqslant 2}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\right]=\dfrac{11}{2}$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** $F_X(k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{5}(T_i\leqslant k)\right)$ où $T_i\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ est le temps d'attente du premier 6 pour le dé i.

On a donc, par indépendance mutuelle, $F_X(k)=\left(1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^k\right)^5$ puis $P(X=k)=F_X(k)-F_X(k-1)$ pour $k\geqslant 1$.

2. Calcul pénible en développant tout avec la formule du binôme

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

2. La probabilité que toutes les boules tombent dans l'urne 1 est $\dfrac{1}{3^n}$ donc $P(X=2)=3\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$. La probabilité que toutes les boules se répartissent dans les urnes 1 et 2 est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc celle qu'en plus aucune des deux urnes 1 et 2 ne reste vide est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{2}{3^n}$ puis $P(X=1)=3\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{2}{3^n}\right]$. Enfin, $P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)$

3. $E(X)=3\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{2}{3^n}\right]+2\dfrac{1}{3^{n-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ce qui est normal car plus le nombre de boules est grand, plus la probabilité que toutes les urnes se remplissent est grande

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $P(M_n\leqslant k)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X_i\leqslant k)\right)\overset{\text{indép}}{=}\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant k)=\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ puis $P(M_n=k)=P(M_n\leqslant k)-P(M_n\leqslant k-1)=\left(\dfrac{k}{N}\right)^n-\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$

2. a) $E(M_n)=\sum_{k=1}^{N}k(P(M_n>k-1)-P(M_n>k))=\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)P(M_n>j)-\sum_{k=0}^{N}kP(M_n>k)=\sum_{k=0}^{N-1}P(M_n>k)$ (le dernier terme de la somme de droite est nul). $P(M_n>k)=1-\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ donc $E(M_n)=N-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$

b) $\lim E(M_n)=N$: plus on fait de tirages, plus on augmente les chances d'avoir la boule N

3. a) $E(M_n(M_n-1))\overset{\text{transf}}{=}\sum_{k=1}^{N}k(k-1)(P(M_n>k-1)-P(M_n>k))=\sum_{j=0}^{N-1}j(j+1)P(M_n>j)-\sum_{k=1}^{N}k(k-1)P(M_n>k)=2\sum_{k=1}^{N-1}P(M_n>k)$ puis $V(M_n)=E(M_n(M_n-1))+E(M_n)-E(M_n)^2=N(N-1)-2\sum_{k=1}^{N-1}k\left(\dfrac{k}{N}\right)^k+E(M_n)-E(M_n)^2$

b) $\lim V_n=N(N-1)+N-N^2=0$: la dispersion des résultats tend vers 0 puisqu'on a presque toujours la même valeur

Exercice 5 *[sujet]* **1.** Comme il n'y a que deux résultats possibles, ça ne peut être qu'une seule personne qui a un résultat différent des autres. Le lancer de chaque personne est une expérience de Bernoulli, indépendante des autres ; on cherche la probabilité d'avoir exactement 1 pile ou 1 face ($n-1$ piles) donc $p_n=\dbinom{n}{1}\dfrac{1}{2^n}+\dbinom{n}{n-1}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

2. Chaque partie des n joueurs est une expérience de Bernoulli de paramètre p_n et X le temps d'attente du premier succès donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p_n)$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $(Y > k) = (X_1 > k, X_2 > k)$ donc $P(Y > k) = P(X_1 \geqslant k+1)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\right)^2 = (1-p)^{2k}$ puis $F_Y(k) = P(Y \leqslant k) = 1 - P(Y > k+1)$

2. $P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k)$ donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left((1-p)^2\right)$

3. $Z = Y + X_3$ donc $E(Z) = E(Y) + E(X_3) = \dfrac{1}{(1-p)^2} + \dfrac{1}{p}$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ puis cours

2. $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$

3. $(Z = 0)$ est l'événement « avoir 2 échecs consécutifs » donc $P(Z = 0) = q^{2n}$.
$(Z = 1) \overset{\text{incomp}}{=} (X = 1, Y = 0) \cup (X = 0, Y = 1)$ puis $P(X = 1, Y = 0) = npq^{n-1} \times q^{n-1}$ et $P(X = 0, Y = 1) = q^n \times npq^{n-1}$

4. $P(Y = h | X = k) = \dbinom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}$ pour $0 \leqslant h \leqslant n-kk$

5. relation facile puis $P(Z = j) = \sum_{k=0}^{j} P(Y = j-k | X = k) P(X = k) \overset{\text{rel}}{=} \dbinom{n}{j} p^j \sum_{k=0}^{j} \dbinom{j}{k} q^{2n-j-k} = \dbinom{n}{j} [p(1+q)]^j (1-q^2)^j$ donc $Z \sim \mathscr{B}(n, q^2)$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $Y(\Omega) \subset [2, +\infty[\cap \mathbb{N}$ et pour $k \geqslant 2$, $(Y = k)$ si on tire le même jeton qu'au premier tirage (proba $1/3$) aux tirages $2, \ldots, k-1$ et un autre jeton (proba $2/3$) au tirage k. Par indépendance mutuelle des tirages, on a $P(Y = k) = \dfrac{1}{3^{k-2}} \dfrac{2}{3}$

2. $Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc $E(Y) = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1 - 2/3}{(2/3)^2} = \dfrac{3}{4}$

3. si $k > h$, $P(Y = k, Z = h) = P(Z = h | Y = k) P(Y = k)$ et si $(Y = k)$ est réalisé, on aura $(Z = h)$ si et seulement si on tire un des deux jetons tirés au cours des tirages $k+1, \ldots, h-1$ (proba $2/3$) et le dernier jeton (proba $1/3$) au tirage k donc $P(Z = h | Y = k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k-1} \dfrac{1}{3}$ puis $P(Y = k, Z = h) = \dfrac{1}{3^{k-1}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k}$

4. pour $h \geqslant 3$, on a $P(Z = h) = \sum_{k=2}^{h-1} P(Y = k, Z = h) = \dfrac{2^{h-1} - 2}{3^{h-1}}$ puis $E(Z) = \dfrac{11}{2}$

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $(X = k, Y = h) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } h > k \\ F_1 \cap \cdots \cap F_{h-1} \cap P_h \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1} & \text{si } h \leqslant k \end{cases}$ donc $P(X = k, Y = h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > k \\ 2^{-(k+1)} & \text{si } h \leqslant k \end{cases}$

2. $P(X = k) = \sum_{h=1}^{k} P(X = k, Y = h) = \dfrac{k}{2^{k+1}}$

3. $E(X) = \sum_{k \geqslant 1} \dfrac{k^2}{2^{k+1}} = 3.$

Exercice 10 *[sujet]* **1.** On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $(X = n)$ est réalisé si et seulement si on obtient « pile » au lancer $n+2$ et un autre pile lors des $(n+1)$ premiers lancers (donc $n+1$ choix). On a donc $P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n = \dfrac{n+1}{2^{n+2}}$

2. $nP(X = n) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2^{n+2}} = 2$

Exercice 11 *[sujet]* On a $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et si on note S_1, E_1 les événements succès et échec au premier lancer, on a $P(X = n) = P(X = n | E_1) P(E_1) + P(X = n | S_1) P(S_1)$ puis $P(X = n | E_1) = P(X = n-1)$ (après un échec, c'est comme si on recommençait l'expérience) et $P(X = n | S_1) = P(X = n-2) P(E_2)$ si $n \geqslant 4$ car après un succès, il faut un échec pour ne pas gagner au lancer 2. Si on note $u_n = P(X = n)$, on a $u_n = (1-p)u_{n-1} + p(1-p)u_{n-2}$ pour $n \geqslant 4$ avec $u_2 = p^2$ et $u_3 = (1-p)p^2$. On en déduit $u_n = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\left(\dfrac{1-p+\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-p+\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n-1}\right]$ avec $\Delta = (1-p)(1+3p)$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** si $|x|<1$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\geqslant 0}x^n$ et en dérivant $r-1$ fois, $\dfrac{(r-1)!}{(1-x)^r}=\sum_{n\geqslant r-1}n(n-1)\dots(n-r+2)x^{n-r+1}\overset{k=n-r+1}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(k+r-1)!}{k!}x^k$.

2. $p_k\geqslant 0$ et $\sum_{k\geqslant 0}p_k=p^r\dfrac{1}{(1-q)^r}=1$

3. on a $X=k$ si on a effectué $k+r$ lancers, le dernier ayant donné un pile ; au cours des $k+r-1$ premiers lancers, k on donné face (et les autres pile), il y a $\binom{k+r-1}{k}$ façon de choisir les numéros des lancers qui ont donné face, la probabilité de chaque événement de ce type est indépendante de l'ordre dans lequel arrive les piles/faces (par indépendance des lancers) donc $P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}P(F_1\cap\dots\cap F_k\cap P_{k+1}\cap\dots\cap P_{k+r})=p_k$

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $P(X=n)=\dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{(n+1)!}$

2. $E(X)=\sum_{n\geqslant 1}n(n+1)-(n+1)+1(n+1)!=e-(e-1)+(e-1-1)$; même méthode pour $V(X)$.

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $X_{N=n}\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ donc $P(X=k,N=n)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

2. On en déduit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $P(X=k|N=n)=\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)^{n-k}$ si $k\leqslant n$; 0 sinon.

2. $P(X=k)=\sum_{n\geqslant k}P(X=k|N=n)$ donc $X\hookrightarrow\mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)$.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

2. $(Y=0)=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(X=2i)$ donc $P(Y=0)=\dfrac{1}{2-p}$

3. Si $i\geqslant 1$, $P(Y=i)=P(X=2i+1)=p(1-p)^{2i}$ et $E(Y)=\dfrac{1-p}{(p(2-p))^2}$

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\dfrac{a}{a+b}\right)$

2. $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$; $P(Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=k)=\dfrac{1}{n}P(X=0)+P(X=k)=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^n+\binom{n}{k}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{n-k}$. On en déduit $E(Y)=E(X)+\dfrac{1}{n}P(X=0)\sum_{k=1}^{n}k=np(1-p)+\dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^n$.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** $P(\text{gagner})=\sum_{n=1}^{+\infty}p(2n)=\dfrac{1}{3}$

2. $G(\Omega)\subset\mathbb{Z}$; $P(G=2k)=p(2k)$ et $P(G=-(2k+1))=p(2k+1)$ si $k\in\mathbb{N}$. $E(G)=\sum_{k=1}^{+\infty}2kp(2k)-\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)p(2k+1)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^nnp(n)=\dfrac{-2}{9}$; calcul similaire pour $V(G)$.

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $P(X_1=i)=\dfrac{2i}{r(r+1)}$; il y a $\dfrac{r(r+1)}{2}$ boules dans l'urne.

2. a) $P(X_{n+1}=r|X_n=r)=1$ car toutes les boules seront numérotées r si on en tire une avec ce numéro au rang n ; si $(X_n<r)$ est réalisé alors r boules portent le numéro r pour ne *n+1 tirage et* $P(X_{n+1}=r|X_n=r)=\dfrac{2r}{r(r+1)}$.

b) $P(X_{n+1}=r)=P(X_{n+1}=r|X_n=r)P(X_n=r)+P(X_{n+1}=r|X_n<r)(1-P(X_n=r))=\dfrac{r-1}{r+1}P(X_n=r)+\dfrac{2}{r+1}$

c) $P(X_n = r) = 1 - \left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^n$

3. a) $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$; $P(Z=1) = P(X_1 = r)$

b) facile

c) $P(Z=k) = P(X_{k-1} < r)P(X_k = r | X_{k-1} < r) = \left[1 - \left(1 - \left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^{k-1}\right)\right] \dfrac{2}{r+1}$

d) $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{r+1}\right)$

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $P(X=k) = \dfrac{1}{n}$ donc $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

2. $Y = n - X$ donc $E(Y) = n - E(X) = \dfrac{n-1}{2}$

Exercice 21 *[sujet]* X est donc le temps d'attente du $r^{\text{ème}}$ succès dans une répétition indépendantes d'épreuves de Bernoulli, c'est donc la somme de r variables aléatoires discrètes suivant $\mathscr{G}(p)$ mutuellement indépendantes donc vu en cours (avec les fonctions génératrices)

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

2. $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$pour $|x| < 1$.

3. $P(S_N = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = k | N = n) P(N = n) = p^{k+1}(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} = \frac{1}{2-p}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^k$ donc $S_N + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2-p}\right)$

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $P(T=0) = P(X_0 = X_1 = 1) = \dfrac{1}{4}$; $P(T=1) = P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) = \dfrac{1}{8}$ et $P(T=2) = P(X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) = \dfrac{1}{8}$

2. $p_{n+1} = P(A_{n+1}|A_n)p_n + P(A_{n+1}|B_n)q_n$ puis $P(A_{n+1}|A_n) = P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $P(A_{n+1}|B_n) = P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2}$; de même $q_{n+1} = P(B_{n+1}|A_n)p_n + P(B_{n+1}|B_n)q_n$ et $P(B_{n+1}|A_n) = P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B_{n+1}|B_n) = 0$ car on terminerait par deux 1 aux rangs n et $n+1$.

3. $(T = n) = B_n \cap (X_{n+1} = 1)$ donc $P(T=n) = \dfrac{1}{2}q_n$; on a $q_{n+2} = \dfrac{1}{2}p_{n+1} = \dfrac{1}{4}(p_n + q_n) = \dfrac{1}{2}q_{n+1} + \dfrac{1}{4}q_n$; si on pose $u_n = 2^{n+2}P(T=n) = 2^n q_n$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 4P(T=0) = 1$ et $u_1 = 8P(T=1) = 1$ donc $u_n = F_n$

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Si $(X_{n-1} = 0)$ est réalisé, les deux jetons de A valent 0 donc on aura $(X_n = 1)$; si $(X_{n-1} = 2)$ est réalisé, les deux jetons valent 1 donc idem ; si $(X_{n-1} = 1)$ on a un jeton 0 et un jeton 1 par boite donc on aura $(X_n = 0)$ avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$ (échanger le jeton 1 de A avec le jeton 0 de B). On en déduit $P(X_n = 0) = \dfrac{1}{4}P(X_{n-1} = 1)$.

2. De même $P(X_n = 2) = \dfrac{1}{4}P(X_{n-1} = 1)$ et $P(X_n = 1) = P(X_{n-1} = 0) + \dfrac{1}{2}P(X_{n-1} = 1) + P(X_{n-1} = 2$

3. Avec $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$, on a $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$. Reste à calculer A^n avec $\mathcal{X}_A = X(X-1)(X-1/2)$ ...

Exercice 25 *[sujet]* **1.** $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(N, \dfrac{1}{6}\right)$

2. Si $k \geqslant i$, $P(X_2 = k | X_1 = i) = \dbinom{N-i}{k-i}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-i}\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)^{N-k}$ puisqu'il reste $N - i$ dés à relancer si $(X_1 = i)$ est réalisé et il faut en faire $k - i$ supplémentaires. On en déduit $P(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{N-i}{k-i}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-i}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \times \binom{N}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{N-i} = \binom{N}{k}\left(\frac{11}{36}\right)^k\left(1 - \frac{11}{36}\right)^{N-k}$. C'est logique puisque cela revient à lancer tous les dés deux fois et compter combien ont donné au moins une fois 6 (événement de probabilité $\dfrac{11}{36}$).

3. On lance tous les dés j fois et on compte ne nombre de dé ayant obtenus au moins un 6 : la probabilité de n'avoir aucun 6 sur un dé en j lancers est $\left(\frac{1}{6}\right)^j$ donc X_j suit $\mathscr{B}\left(N, 1-\left(\frac{1}{6}\right)^j\right)$.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{p}\right)$

2. Ne pas s'arrêter à un étage est une expérience de Bernoulli de paramètre $P(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$ donc si Y_i est la variable aléatoire discrète de Bernoulli valant 1 si on ne s'arrête pas à l'étage i, on a $X = p - \sum_{i=1}^{p} Y_i$, ce qui donne $E(X) = p - \sum_{i=1}^{p} E(Y_i) = p - p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$

3. $E(X) = p\left[1 - \left(1 - \frac{n}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right] \xrightarrow[p\to+\infty]{} n$

Exercice 27 *[sujet]* $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, si $k \in [\![1, n]\!]$, $P(Z = k) = P(Y = k, X = 0) + P(X = k) = \frac{1}{n}(1-p)^n + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Donc $E(Z) = \sum_{k=1}^{n} kP(Z = k) = \frac{n+1}{2}(1-p)^n + np$

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $\frac{X_k}{k}$ prend les valeurs 0 et 1 donc est une loi de Bernoulli. $P\left(\frac{X_k}{k} = 1\right) = \sum_{i=0}^{n} P(X_k = k|A_i)P(A_i)$ $P(A_i) = 2^{-n}\binom{n}{i}$ puisqu'il y a 2^n poignées possibles et $\binom{n}{i}$ qui sont de cardinal i ; si $i \geqslant 1$, $P(X_k = k|A_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}$ puisqu'une poignée à i éléments contient k si et seulement si c'est la réunion de $\{k\}$ et d'une poignée à $i-1$ éléments autres que k. On en déduit $P(X_k = k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$.

2. $X = \sum_{k=0}^{n} X_k$ donc $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kE\left(\frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** $P(Y = k) = P(X = 2k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ si $k \geqslant 1$ et $P(Y = 0) = 2 - e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$

2. $E(Y) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\operatorname{sh}(\lambda)$

3. Avec $k^2 = \frac{1}{4}[(2k)(2k-1) + (2k)]$ et th de transf, $4E(Y^2) = e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} = e^{-\lambda}(\lambda^2 \operatorname{ch}\lambda + \lambda \operatorname{sh}\lambda)$

Exercice 30 *[sujet]* **1.** $E(Z_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ par indép mutuelle (généralisation du résultat du cours) et $E(X_i) = 1-2p$ donc $E(Z_n) = (1-2p)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. $Z_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Z_n = 1$ si et seulement si un nombre pair de X_i valent -1 donc $P(Z_n = 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k} = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right]$ (développer $(p + (1-p))^n$ et $(p - (1-p))^n$ et les ajouter)

3. Si Z_1 et Z_2 sont indép alors $E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)E(Z_2) = (1-2p)^3$; mais $Z_1 Z_2 = X_2$ donc $E(Z_1 Z_2) = E(X_2) = 1-2p$ donc $p = \frac{1}{2}$ est la seule possibilité (car $p \neq 0$). Pour $p = \frac{1}{2}$, $P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Z_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}$ donc Z_1 et Z_2 sont indép (les autres cas se traitent de même)

Exercice 31 *[sujet]* **1.** par continuité décroissante $P\left(\bigcap_{k\geqslant 1} A_k\right) = \lim_{p\to+\infty} P(B_p)$; par coalitions, les A_k sont indép donc $P(B_p) = \prod_{k=1}^{p} P(A_k)$ et $P(A_k) = P((X_{2k-1} = 0) \cup (X_{2k} = 0)) = P(X_{2k-1} = 0) + P(X_{2k} = 0) - P(X_{2k-1} =$

$X_{2k}=0)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$. Donc $P(B_p)=\left(\dfrac{8}{9}\right)^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.

$\overline{\bigcap_{k\geqslant 1}A_k}=\bigcup_{k\geqslant 1}(X_{2k-1}=X_{2k}=1)\subset\bigcap_{j\geqslant 1}(X_j=X_{j+1}=1)=(T\in\mathbb{N})$

2. $P(T=n+1)=P(T=n+1|X_1=0)P(X_1=0)+P(T=n+1|X_1=1)P(X_1=1)=P(T=n)\dfrac{1}{3}+P(T=n-1)\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}$ car si $(X_1=0)$ et $(T=n+1)$ (avec $n\geqslant 3$) alors $(X_2=0)$. De plus $P(T=2)=\dfrac{4}{9}$ et $P(T=3)=\dfrac{4}{27}$

3. T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (presque sûrement) donc $E(T)$ existe dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ et on a $E(T)=\sum_{n\geqslant 2}nP(T=n)=2P(T=2)+3P(T=3)+\sum_{n\geqslant 3}(n+1)P(T=n+1)=\dfrac{8}{9}+\dfrac{4}{9}+\sum_{n\geqslant 3}(n+1)\left[\dfrac{1}{3}P(T=n)+\dfrac{2}{9}P(T=n-1)\right]=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}(E(T)-2P(T=2)+1-P(T=2))+\dfrac{2}{9}(E(T)+2)\ \ldots$

Exercice 32 *[sujet]* **1.** On a $X(\Omega)\subset[\![-n,n]\!]$ mais $X_n(\Omega)\neq[\![-n,n]\!]$: si n est pairs les positions atteintes sont d'indices pairs et si n est impair, seules les positions impaires sont atteignables.

2. $X_n=n-2D_n$

3. $D_n\sim\mathscr{B}np$ donc $P(X_{2n}=2k)=\dbinom{2n}{n-k}p^k(1-p)^{n+k}$ et $P(X_{2n+1}=2k+1)=\dbinom{2n+1}{n-k}p^{n-k}(1-p)^{n+k+1}$

4. $E(X_n)=n-2E(D_n)=n(1-2p)$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** On pose $V_n=1$ si on va à droite et $V_n=0$ si on va vers la gauche ; $V_n\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ et $X_{n+1}-X_n=2V_{n+1}-1$ donc $X_n=2\sum_{k=1}^n V_k-n$. Par indépendance des déplacements, $Y_n=\sum_{k=1}^n V_k\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ donc $X_n(\Omega)\subset[\![-n,n]\!]$ et $P(X_n=k)=P\left(Y_n=\dfrac{k+n}{2}\right)=\begin{cases}\dbinom{n}{h}p^h(1-p)^{n-h} & \text{si } k+n=2h\\ 0 & \text{si } k+n \text{ est impair}\end{cases}$

2. Par linéarité de l'espérance, $E(X_n)=2\sum_{k=1}^n E(V_k)-n=n(2p-1)$ donc X_n est centrée si et seulement si $p=frac12$.

3. $V(X_n)=2^2V(Y_n)$ et $V(Y_n)=\sum_{k=1}^n V(V_k)$ par indépendance 2 à 2 des V_k. On a donc $V(X_n)=4np(1-p)$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** a) $Y_1\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b) $Y_r(\Omega)=[\![r,+\infty]\!]$; $P(Y_r=r)=\dfrac{r!}{n^r}$. Pour obtenir les r boules en $r+1$ tirages, on doit avoir dans les r premiers tirages soit une boule de numéro $\geqslant r+1$ ($r\times(n-r)$ possibilités) soit une boule de numéro $\leqslant r$ qui se répète à deux rangs différentes ($\dbinom{r}{2}\times r$ choix) donc $P(Y_r=r+1)=\dfrac{r!}{n^{r+1}}\left(n-r+\dbinom{r}{2}\right)$

2. a) X_i est le temps d'attente d'un nouveau numéro (lorsque $i-1$ d'entre eux sont déjà sortis) donc $X_i\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\dfrac{r-i+1}{n}\right)$ et $E(X_i)=\dfrac{n}{r-i+1}$

b) $Y_r=\sum_{i=0}^r X_i$ (avec $W_0=0$) donc $E(Y_r)=\sum_{i=0}^r\dfrac{n}{r-i+1}=n\sum_{k=1}^{r+1}\dfrac{1}{k}$ donc $Y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln(n)$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Probas totale avec le SCE $(A_{n+1},\overline{A_{n+1}})$ où A_{n+1} est « on tire une boule rouge au $n+1^{\text{ème}}$ tirage ».

2. $E(X_{n+1})=\sum_{k=0}^N kP(X_{n+1}=k)=\sum_{k=0}^N k\dfrac{N-k}{N}P(X_n=k)+k\dfrac{k+1}{N}P(X_n=k+1)\overset{h=k+1}{=}E(X_n)-\sum_{k=0}^N\dfrac{k^2}{N}P(X_n=k)+\sum_{h=1}^N(h-1)\dfrac{h}{N}P(X_n=h)$ (car $P(X_n=N+1)=0$) donc $E(X_{n+1})=E(X_n)-\dfrac{1}{N}E(X_n)=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)E(X_n)$

3. $E(X_n)=N\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$ donc (Markov VAD positive) $P(X_n\geqslant 1)\leqslant N\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\dfrac{E(X_n)}{N}=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

4. si l'urne ne contient plus de boule rouge alors il n'y en aura plus jamais donc $(X_{n+1} \geqslant 1) \subset (X_n \geqslant 1)$ et si $(Y = 0)$ alors il y a toujours une boule rouge donc $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$. On en déduit $P(Y = 0) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)\right) = P(X_n \geqslant 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $P(Y = 0) = 0$

Exercice 36 *[sujet]* Le nombre de poignées est 2^n, celui contenant le jeton i et 2^{n-1} donc $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$; puis $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$ donc $E(S) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(6)$ et $F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{6}\lfloor t \rfloor & \text{si } t \in [1, 6[\\ 1 & \text{si } t \geqslant 6 \end{cases}$

2. $(Y_n \leqslant t) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant t)$ donc, par indépendance mutuelle, $F_n(t) = (F_X(t))^n$

3. (F_n) CS vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 6 \end{cases}$ donc $\|f - F_n\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. On a $(Z_n > t) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i > t)$ donc $1 - F_{Z_n}(t) = (1 - F_X(t))^n$ puis (F_{Z_n}) CS vers $g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$; la CV est uniforme car $\|g - F_{Z_n}\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 38 *[sujet]* Comme $X^2 = X$ et $Y^2 = Y$, A est une matrice de projection si et seulement si $XY = 0$; non nulle si et seulement si $X \neq 0$ ou $Y \neq 0$ donc si et seulement si X ou Y (et pas les 2) est nul : $P(A\text{proj}) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = (1 - n)p + n(1 - p)$.

Exercice 39 *[sujet]* **1.** On a $\text{rg}(M) \leqslant 1$ donc $\text{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - P(M = 0) = 1 - (1 - p)^n$ par indépendance.

2. On vérifie $M^2 = \text{Tr}(M)M$ donc M est une matrice de projection si et seulement si $\text{Tr}(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$

3. M est symétrique donc M est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $M^2 = M$ donc si et seulement si $\text{Tr}(M) = 1$; de plus $\text{Im}(M) = \text{Vect}\{U\}$ donc M est la projection orthogonale cherchée si et seulement si $(X_1 = \cdots = X_n = 1)$ donc avec une probabilité égale à p^n

Exercice 40 *[sujet]* **1.** Les matrices triangulaires

2. $\mathcal{X}_A = X^3 + X[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2]$ donc A vérifie (P) si et seulement si $X_1 = X_2$ et $X_2 = X_3$. La probabilité que A vérifie (P) est donc $P(X_1 = X_2 = X_3) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)P(X_3 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^3(1 - p)^{3(k-1)} = \frac{p^3}{1 - (1 - p)^3}$

Exercice 41 *[sujet]* **1.** $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(T = n) = P(Y = n - 1) = e^{-2}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$

2. $\sum_{k\geqslant 0} p_k = e^{-2}\left(\text{ch}(2) + \alpha \sum_{h\geqslant 0} \frac{2^{2h+1}}{(2h+1)!}\right) = e^{-2}(\text{ch}(2) + \alpha\,\text{sh}(2))$; on doit donc avoir $\alpha = 1$.

On remarque que $p_k = P(T = 2k) + P(T = 2k + 1)$ donc $E(X) = \sum_{k\geqslant 1} kp_k = \frac{1}{2}E(T) - \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0} P(T = 2k + 1) = \frac{1}{2}(3 - \text{ch}(2))$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

2. $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1}(2^{n+1} - 1)$ donc $a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}$

3. Le même calcul donne $G_X(t) = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{(2^{n+1} - 1)t}$ puis $E(X) = \frac{n2^{n+1} + 1}{2^{n+1} - 1}$ et $V(X) = \ldots$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k\geqslant 1} p_k = p^2 \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = 1$

2. Par th de transfert $E(X-1) = \sum_{k\geqslant 1} p^2 k(k-1)(1-p)^{k-1} = p^2 \dfrac{2(1-p)}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{2(1-p)}{p}$ et $E(X-1)(X-2)) = \sum_{k\geqslant 1} p^2 k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1} = p^2(1-p)^2 \dfrac{6}{(1-(1-p))^4} = \dfrac{6(1-p)^2}{p^2}$

3. Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(X-1)+1 = \dfrac{2-p}{p}$ et $V(X) = E((X-1)(X-2)) + 3E(X) - 2 - E(X)^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$

Exercice 44 *[sujet]* **1.** Il est plus facile d'utiliser le TCD que le TITT : $\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = r\int_0^1 (1-t)^{r-1}(1-t^n)\,\mathrm{d}t$ et $|(1-t)^{r-1}(1-t^n)| \leqslant \dfrac{1}{(1-t)^{1-r}}$ qui est intégrable sur $[0,1[$ donc $\sum_{k\geqslant 1} P(X=k) = r\int_0^1 (1-t)^{r-1}\,\mathrm{d}t = 1$.

2. Si $r=1$, on vérifie (IPP) que $P(X=k) = \dfrac{1}{k+1}$ donc $E(X)$ n'existe pas (et pas plus si $r \leqslant 1$) ; par contre, pour $r>1$, on trouve (TCD encore) $E(X) = r\int_0^1 \dfrac{1}{(1-t)^2}(1-t)^r\,\mathrm{d}t = r\int_0^1 (1-r)^{r-2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{r}{r-1}$. On prouve de même que $E(X)$ n'existe que pour $r>2$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** $1+X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{1+a}\right)$ et $\dfrac{1}{1+a} \in]0,1[$

2. a) $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(Z=n) = \sum_{k\geqslant 0} P(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = (n+1)\dfrac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$

b) $E\left(\dfrac{1}{1+Z}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1} P(Z=n) = \dfrac{1}{1+a}$; par symétrie on a $E\left(\dfrac{x}{1+Z}\right) = E\left(\dfrac{Y}{1+Z}\right)$ donc $2E\left(\dfrac{X}{1+Z}\right) = E\left(\dfrac{Z}{1+Z}\right) = 1 - E\left(\dfrac{1}{1+Z}\right) = \dfrac{a}{1+a}$

3. a) $P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1 - \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{n+1}$

b) $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(T \geqslant k) = P(X \geqslant k)P(Y \geqslant k) = \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{2(n+1)}$ puis $P(T=k) = P(T \geqslant k) - P(T \geqslant k+1)$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** Par linéarité et $E(X) = E(Y)$, on a $2E(x) - 1 = E(Z) = \dfrac{1}{p}$ donc $E(X) = \dfrac{1+p}{2p}$

2. Par indép de X et Y (et $G_X = G_Y$), on a $G_Z(t) = tG_X(t)^2$ donc $G_X(t) = \sqrt{\dfrac{p}{1+(1-p)t}}$ (positif car G_X^2 donc G_X ne s'annule pas, est continue sur $]-R,R[$ et positive en 1)

3. $(1-u)^{-1/2} = \sum_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n} \dfrac{u^n}{4^n}$ si $|u|<1$ donc par DSE de G_X, on trouve $P(X=n) = \sqrt{p}\dbinom{2n}{n}\dfrac{(1-p)^n}{4^n}$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** Par théorème de transfert, $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \dfrac{p^k(1-p)^{n-k}}{1+k} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \dbinom{n+1}{k+1} p^k(1-p)^{n-k} = \dfrac{1}{p(n+1)}\left[1-(1-p)^{n+1}\right]$

2. $Z(\Omega) = \{-1,1\}$ et $P(Z=1) = \sum_{k\geqslant 0} P(X=2k) = e^{\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$; $E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P(X=k) = e^{-2\lambda}$

Exercice 48 *[sujet]* $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+k} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** $P(Y = 1+n^2) = P(X=n)$

2. $2X < Y \Leftrightarrow 0 < (1-X)^2$ donc $P(2X<Y) = P(X \neq 1) = 1 - P(X=1)$

3. $P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{k \geqslant 0} P(X = 2k) = e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda)$

4. $e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda) = \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2} > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis $(T = k) = (X = k, Y \geqslant k+1) \cup (X = Y = k) \cup (Y = k, X \geqslant k+1)$ donc, per indep de X et Y $P(T = k) = p^2(1-p)^{2k-2} + 2p(1-p)^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = p(2-p)(1-p)^{2k-2}$ donc $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p(2-p))$, $E(T) = \dfrac{1}{p(2-p)}$ et $G_T(t) = \dfrac{p(2-p)t}{1-(1-p)^2 t}$

2. Par transfert, $E\left(\dfrac{1}{T(T+1)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} P(X = k)$ (la série est ACV car $\dfrac{1}{k(k+1)} \leqslant 1$) puis $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ et $E\left(\dfrac{1}{T(T+1)}\right) = p(2-p)\left[\dfrac{-\ln(1-(1-p)^2)}{(1-p)^2} - \dfrac{-\ln(1-(1-p)^2) - (1-p)^2}{(1-p)^4}\right]$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** $N \sim \mathscr{G}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ car la proba de faire au moins 6 est $\dfrac{3}{5}$

2. si E_k est faire > 6 au lancer k et F_n est la valeur du dé au $n^{\text{ème}}$ lancer alors $(X = k, N = n) = E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap (F_n = k)$ donc $P(X = k, N = n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{10}$

3. $P(X = k) = \sum_{n \geqslant 1} P(X = k, N = n) = \dfrac{1}{6}$ donc $X \sim \mathscr{U}(6)$

4. on vérifie $P(X = k, N = n) = P(X = k)P(N = n)$ donc elles sont indépendantes.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** si $k, n \geqslant 1$, $P(X = k, Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ 2^{-(k+1)} & \text{si } k \geqslant n \end{cases}$ car pour $k \geqslant n$, $(X = k, Y = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$

2. $P(X = k) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-(k+1)} = \dfrac{k}{2^{k+1}}$

3. pour $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k \geqslant 0} x^k$ donc $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k \geqslant 0} k x^{x-1}$ et $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k \geqslant 0} k(k-1)x^{k-2}$ donc $E(X) = \sum_{k \geqslant 1} \dfrac{k^2}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{8} \sum_{k \geqslant 0} \dfrac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \dfrac{1}{4} \sum_{k \geqslant 0} \dfrac{k}{2^{k-1}}$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $S(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$

2. $P(S = i, N = j) = P(S = i | N = j)P(N = j) = \binom{j}{i} \gamma^i (1-\gamma)^{j-i} \times \binom{n}{j} p^j (1-p)^j$ pour $i \leqslant j$ (0 sinon)

3. $P(S = i) = \sum_{j=i}^{n} P(S = i, N = j) = \binom{n}{i} (p\gamma)^i (1-p\gamma)^{n-i}$

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $P(X = k, Y = h) = P(Y = h | X = k)P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k p^h (1-p)^{k-h}}{h!(k-h)!} & \text{si } h \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $P(Y = h) = \sum_{k \geqslant 0} P(X = k, Y = h) = \sum_{k \geqslant h} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k p^h (1-p)^{k-h}}{h!(k-h)!} \overset{j=h-k}{=} \sum_{j \geqslant 0} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{j+h} p^h (1-p)^j}{h! j!} = \dfrac{e^{-\lambda} p^h \lambda^h}{h!} \times e^{\lambda(1-p)}$ donc $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$

3. $P(X = 0, Y = 1) = 0$ alors que $P(X = 0)P(Y = 1) \neq 0$ donc les variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** $S(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ puis $G_S(t) = G_X(t)^2 = \left(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\right)^2$ donc $P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$

2. Pour $1 \leqslant n \leqslant k-1$, $P(X = n | S = k) = \dfrac{P(X = n, Y = k-n)}{P(S = k)} = \dfrac{1}{k-1}$ (loi uniforme)

3. $1-p=\dfrac{P(Z>n+1)}{P(Z>n)}$ donc $P(Z>n)=(1-p)^nP(Z>0)$ puis $P(Z=n)=P(Z>n-1)-P(Z>n)=p(1-p)^{n-1}P(Z>0)$ et comme $\sum_{n=0}^{+\infty}P(Z=n)=1$, on trouve $P(Z>0)=1-p$ et $1+Z\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

4. $P(S=Z)=\sum_{n=2}^{+\infty}P(S=n,Z=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)p^3(1-p)^{2n-2}=p^3\dfrac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}=p(1-p)^2$.

Exercice 56 *[sujet]* Si $Z=\min(X,Y)$, on a $P(Z\geqslant k)=P(X\geqslant k,Y\geqslant k)\overset{\text{indep}}{=}P(X\geqslant k)P(Y\geqslant k)=\left(\sum_{j\geqslant k}p(1-p)^{j-1}\right)^2=(1-p)^{2(k-1)}$ puis $P(Z=k)=P(Z\geqslant k)-P(Z\geqslant k+1)$ et $Z\hookrightarrow\mathscr{G}(p(2-p))$.

Exercice 57 *[sujet]* **1.** $P(U=k,V=k)=P(X=Y=k)=p^2(1-p)^{2k-2}$ et si $i>j$ alors $P(U=i,V=j)=P(X=i,Y=j)+P(X=j,Y=i)=2p^2(1-p)^{i+j-2}$

2. $P(U=i)=\sum_{j=1}^{i}P(U=i,V=j)=2p(1-p)^{i-1}-p(2-p)(1-p)^{2i-1}$ et $P(V=j)=\sum_{i\geqslant j}P(U=i,V=j)=p(2-p)(1-p)^{2j-2}$ donc $V\hookrightarrow\mathscr{G}(p(2-p))$

Exercice 58 *[sujet]* **1.** $P(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n)=p(1-p)^n$ donc $1+Y\sim\mathscr{G}(p)$

2. dériver k fois le DSE de $\dfrac{1}{1-x}$ puis $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$ donc $1+X\sim\mathscr{G}\left(\dfrac{2p}{1+p}\right)$

3. $P(X=1,Y=0)=0$ mais $P(X=1)P(Y=0)\neq 0$

Exercice 59 *[sujet]* **1.** $P(X=i)=\sum_{j=0}^{i}P(X=i,Y=j)=\dfrac{e^{-\beta}\beta^i}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}$ donc $X\sim\mathscr{P}(\beta)$ et $P(Y=j)=\sum_{i=j}^{+\infty}P(X=i,Y=j)\overset{k=i-j}{=}\dfrac{e^{-\beta}(\alpha\beta)^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^k(1-\alpha)^kk!$ donc $Y\sim\mathscr{P}(\alpha\beta)$

2. $P(X=1,Y=2)=0$ alors que $P(X=1)P(Y=2)\neq 0$

3. $P(Z=n)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=j+n,Y=j)=e^{-\beta}\dfrac{(1-\alpha)^n\beta^n}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{(\alpha\beta)^j}{j!}$ donc $Z\sim\mathscr{P}(\beta(1-\alpha))$

4. $P(Y=j|Z=n)=\dfrac{P(Y=j,X=n+j)}{P(Z=n)}=\cdots=P(Y=j)$ donc Y et Z sont indépendantes

Exercice 60 *[sujet]* **1.** $\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}P(X=i,Y=j)=4^n$ donc $\lambda=4^{-n}$

2. $P(X=i)=\sum_{j=1}^{n+1}P(X=i,Y=j)=\binom{n}{n-i}2^{-n}$ donc on vérifie X et Y indépendantes (et de même loi)

3. $Z\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ donc $E(X)=1+E(Z)=\dfrac{n}{2}$ et $V(X)=V(Z)=\dfrac{n}{4}$.

4. Par indépendance $E(XY)=E(X)E(Y)=E(X)^2$ puis $E\left(2^{X-Y}\right)=E\left(2^X\right)E\left(2^{-Y}\right)=1$ puisque X et Y sont de même loi

Exercice 61 *[sujet]* **1.** $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}P(X=i,Y=j)=\lambda e^{2a}$ donc $\lambda=e^{-2a}$

2. $P(X=i)=\sum_{j\geqslant 0}P(X=i,Y=j)$ donne $X\hookrightarrow\mathscr{P}(a)$ puis $Y\hookrightarrow\mathscr{P}(a)$; elles sont indépendantes

3. $X+Y\hookrightarrow\mathscr{P}(2a)$

Exercice 62 *[sujet]* **1.** $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\dfrac{a}{2^{i+1}j!}=ae$ donc $a=e^{-1}$.

2. $P(X=i)=\dfrac{1}{2^{i+1}}$ et $P(Y=j)=\dfrac{e^{-1}}{j!}$ donc indépendantes.

3. $1+X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $E(X)=1+2=3$ et $V(X)=V(1+X)=2$

4. $P(X=Y)=\sum_{i\geqslant 0} P(X=i,Y=i)=e^{-1}\frac{e^{1/2}}{2}$; la matrice est DZ si et seulement si $X\neq Y$ car si $X=Y$ elle possède une seule valeur propre (double) et l'espace propre n'est que de dimension 1.

Exercice 63 *[sujet]* **1.** $G_X(t)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{nt^n}{2^{n+1}}=\frac{t}{(2-t)^2}$ pour $|t|<2$ et on a bien $G_X(1)=1$

2. $E(X)=G'_X(1)=3$

3. Si $j\leqslant i$, $P(X=i,Y=j)=P(Y=j|X=i)P(X=i)=\frac{1}{i}P(X=i)=\frac{1}{2^{i+1}}$

4. $P(Y=j)=\sum_{i=j}^{+\infty}P(X=i,Y=j)=\frac{1}{2^j}$ donc $Y\sim\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $E(Y)=2$.

Exercice 64 *[sujet]* **1.** Le fait qu'un électron soit efficace est une expérience de Bernoulli, indépendantes mutuellement les unes des autres donc $P(X=i|N=j)=\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}$ (si $i\leqslant j$ bien sûr)

2. $X(\Omega)=N(\Omega)=\mathbb{N}$ puis $P(X=i,N=j)=P(X=i|N=j)P(N=j)=\ldots$

3. $P(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=i|N=j)P(N=j)=\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{j!}{i!(j-i)!}p^i(1-p)^{j-i}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\overset{k=j-i}{=}\frac{p^i}{i!}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-p)^k\lambda^{i+k}}{k!}$ donc $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$, $E(X)=V(X)=\lambda p$

4. On trouverait de même $Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda(1-p))$ puis $X+Y=N$ donc $V(N)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)$, ce qui donne $2\operatorname{Cov}(X,Y)=\lambda-\lambda p-\lambda(1-p)=0$.

Exercice 65 *[sujet]* **1.** $X_{(N=n)}\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$

2. $P(X=k,N=n)=P(X=k|N=n)P(N=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}p(1-p)^{n-1}$ si $k\leqslant n$

3. Si $k\geqslant 1$, $P(X=k)=\sum_{n\geqslant 1}P(X=k,N=n)=p^{k+1}(1-p)^{k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}[(1-p)^2]^{n-k}=\frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}}=\frac{1}{(2-p)^2}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$ alors que $P(X=0)=\sum_{n\geqslant 1}P(X=0|N=n)=\sum_{n\geqslant 1}p(1-p)^{2n-1})=\frac{1-p}{2-p}$

4. $E(X)=\frac{1}{2-p}\sum_{k\geqslant 1}k\frac{1}{2-p}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}=1$

Exercice 66 *[sujet]* **1.** a) $(X_1=k)=P_1\ldots P_kF_{k+1}\cup F_1\ldots F_kP_{k+1}$ donc $P(X_1=k)=p^kq+q^kp$

b) $E(X_1)=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ donc $E(X_1)-2=\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$

2. a) $(X_1=k,X_2=h)=P_1\ldots P_kF_{k+1}\ldots F_{k+h}P_{k+h+1}\cup F_1\ldots F_kP_{k+1}\ldots P_{k+h}F_{k+h+1}$ donc $P(X_1=k,X_2=h)=p^{k+1}q^h+q^{k+1}p^h$

b) $P(X_2=h)=\sum_{k\geqslant 1}P(X_1=k,X_2=h)=p^2q^{h-1}+q^2p^{h-1}$

c) $E(X_2)=2$ et $V(X_2)=2\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-1\right)$

3. Si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $P(X_1=X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)$ donc $2(p^2+q^2)=1$ ce qui donne $p=\frac{1}{2}$; on vérifie alors que X_1 et X_2 sont bien indépendantes pour $p=\frac{1}{2}$.

Exercice 67 *[sujet]* **1.** $P(Y=0|X=0)=1$ et $P(Y=i|X=0)=0$ puis $P(Y=k|X=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si $k\leqslant n$ (0 sinon)

2. $P(X=n,Y=k)=P(Y=k|X=n)P(X=n)$ donc $P(X=Y=0)=P(X=0)=e^{-\lambda}$, $P(X=0,Y=k)=0$ et $P(X=n,Y=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$. On en déduit $P(Y=0)=e^{-\lambda}+\sum_{n\geqslant 1}P(X=n|Y=0)=e^{-\lambda p}$ et $P(Y=k)=\sum_{n\geqslant k}P(X=n,Y=k)$ donc $Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$.

Exercice 68 *[sujet]* **1.** $U = XY$ donc $E(U) = E(X)E(Y) = \dfrac{p}{a}$ puis $X^2 = X$ donc $E(U^2) = E(X)E(Y^2)$ donc $V(U) = pE(Y^2) - p^2E(Y)^2 = pV(Y) + p(1-p)E(Y)^2$

2. $V = XZ + (1-X)Y$ donc $E(V) = E(X)E(Z) + (1 - E(X))E(Y)$; comme $X(1-X) = 0$, $E(V^2) = E(X)E(Z^2) + (1 - E(X))E(Y^2)$

Exercice 69 *[sujet]* **1.** $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$

2. $P(X_k, Y = h) = P(X = k)P(Y = h|X = k) = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{k}$ pour $h \leqslant k$ (0 sinon) ; $P(X = k) = \displaystyle\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}$

3. $P(Y = h) = \displaystyle\sum_{k=h}^{n} \frac{1}{nk}$ puis $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} \sum_{h=1}^{k} h = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2n} = \frac{n+3}{4}$.

4. $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = y = k)$ puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln(n)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X = Y) = 0$

Exercice 70 *[sujet]* **1.** $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$ (cours)

2. $P(X = k|Z = n) = \dfrac{P(X = k, Y = n-k)}{P(Z = n)}$ donc on trouve $X_{(Z=n)} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

Exercice 71 *[sujet]* **1.** $D(\Omega) = \mathbb{N}$; si $n \geqslant 1$, $(D = n) = \displaystyle\bigcup_{k\geqslant 1} [(X = n+k, Y = k) \cup (Y = n+k, X = k)]$ donc par incompatibilité 2 à 2 de $(X = k)$ et $(X = n+k)$ et indépendance de X et Y, on a $P(D = n) = 2p^2 \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (1-p)^{n+2k-2} = \frac{2p(1-p)^n}{2-p}$. De même $(D = 0) = \displaystyle\bigcup_{k\geqslant 1} (X = Y = k) = \frac{p}{2-p}$

2. $T + U = X + Y$, $T - U = |Y - X|$ et $TU = XY$

3. $\mathrm{Cov}(T, U) = E(TU) - E(T)E(U)$ puis $E(TU) = E(X)E(Y) = \dfrac{1}{p^2}$ par indépendance de X et Y ; $E(T) + E(U) = E(T+U) = E(X) + E(Y) = \dfrac{2}{p}$ et $E(T) - E(U) = E(D) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nP(D = n) = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}$ donc $E(T) = \dfrac{3-p}{p(2-p)}$ et $E(U) = \dfrac{1}{p(2-p)}$ et au final $\mathrm{Cov}(T, U) = \dfrac{1 - 3p + p^2}{p^2(2-p)^2}$

4. $P(T = 1, U = 2) = 0$ alors que $P(T = 1)P(U = 2) \neq 0$.

Exercice 72 *[sujet]* **1.** a) $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $P(V = 0, M = n) = P(X = Y = n) = p^2(1-p)^{2n-2}$ et, si $k \geqslant 1$, $P(V = k, M = n) = P(X = n, Y = n+k) + P(X = n+k, Y = n) = 2p^2(1-p)^{2n+k-2}$

b) $P(V = 0) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(V = 0, M = n) = \frac{p}{2-p}$, $P(V = k) = 2p\dfrac{(1-p)^k}{2-p}$ et $P(M = n) \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} P(V_k, M = n) = p(2-p)(1-p)^{2n-2}$. On vérifie que V et M sont indépendantes.

2. a) $P(V = 1, M = n) = P(X = n, Y = n+1) + P(X = n+1, Y = n) = 2p_np_{n+1}$ et par indépendance de V et M, on a $2p_np_{n+1} = P(V = 1)P(M = n)$; de même on trouve $p_n^2 = P(V = 0)P(M = n)$ puis par quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ est constant ; (p_n) est une suite géométrique donc X et Y suivent une loi géométrique.

3. La loi de X et Y est géométrique si et seulement si M et V sont indépendantes.

Exercice 73 *[sujet]* **1.** $(X + Y)(\Omega) \subset X(\Omega) + Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et $P(X + Y = n) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k, Y = n-k) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k)P(Y = n-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = -k)P(Y = k-n) = P(X + Y = -n)$

2. Par récurrence sur p, en admettant que si $X_1, \dots, X_p$ sont mutuellement indépendantes alors $X_1 + \cdots + X_{p-1}$ et X_p sont indépendantes

Exercice 74 *[sujet]* **1.** $N_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_i)$

2. $Z_{i,j}$ est le nombre de jetons i ou j tirés donc $Z_{i,j} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_i + p_j)$ et $\mathrm{Cov}(N_i, N_j) = \dfrac{1}{2}\left(V(Z_{i,j}) - V(N_i) - V(N_j)\right)$

Exercice 75 *[sujet]* **1.** Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ alors $E(XY) = E(X)E(Y)$; pour les loi de Bernoulli, $E(X) = P(X = 1)$ et $E(Y) = P(Y = 1)$. De plus $XY(\Omega) = \{0, 1\}$ donc XY suit aussi une loi de Bernoulli et $P(XY = 1) = E(XY) = P(X = Y = 1)$.

2. $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants donc $(X=1)$ et $\overline{(Y=1)}=(Y=0)$ aussi ; idem pour les deux derniers.

Exercice 76 *[sujet]* **1.** Par bilinéarité, on a $\mathrm{Cov}(S,D)=-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)=0$ mais S et D ne sont pas indépendantes car $P(S=2,D=0)=P(X=Y=1)=\dfrac{1}{n^2}$ alors que $P(S=2)=P(X=Y=1)=\dfrac{1}{n^2}$ et $P(D=0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(X=Y=k)=\frac{1}{n}$.

2. a) $S(\Omega)=[\![2,2n]\!]$

b) $P(S=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{k=\max\{1,k-n\}}^{\min\{n,k-1\}}\frac{1}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k\geqslant n+1\\ \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k\leqslant n+1\end{cases}$

Exercice 77 *[sujet]* **1.** $D(\Omega)=\mathbb{N}$; $P(D=0)=\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}P(X=k,Y=k)=\sum_{k\geqslant 1}p^2(1-p)^{2k-2}=\frac{p}{2-p}$ et, si $n\geqslant 1$,

$P(D=n)=\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}P(X=k,Y=n+k)+P(X=n+k,Y=k)=2\sum_{k\geqslant 1}p^2(1-p)^{n+2k-2}=2p\frac{(1-p)^n}{2-p}$

2. $T+U=X+Y$, $T-U=D$ et $UT=XY$; on en déduit $E(UT)=E(XY)=E(X)E(Y)=\dfrac{1}{p^2}$, $E(T)+E(U)=E(X)+E(Y)=\dfrac{2}{p}$ et $E(T)-E(U)=E(D)=\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}2kp\frac{(1-p)^k}{2-p}=\frac{2(1-p)}{p(2-p)}$ ce qui donne $\mathrm{Cov}(T,U)=\dfrac{1}{p^2}-\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1-p}{p(2-p)}\right)\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1-p}{p(2-p)}\right)=\dfrac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}$.

Exercice 78 *[sujet]* **1.** $P(X=Y)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}P(X=n,Y=n)=\sum_{n\geqslant 1}p^2(1-p)^{2(n-1)}=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}$. Comme $\det(M)=X^2-Y^2$ et $X+Y\geqslant 2$ (donc $\neq 0$), M est inversible si et seulement si $X\neq Y$ donc proba $1-\dfrac{p}{2-p}$

2. Les valeurs propres de M sont $\lambda_1=X+Y$ et $\lambda_2=X-Y$ donc $\mathrm{Cov}(\lambda_1,\lambda_2)=E[(X+Y)(X-Y)]-E(X+Y)E(X-Y)\overset{\text{lin}}{=}E(X^2)-E(Y^2)-E(X)^2+E(Y)^2=V(X)-V(Y)=0$. Mais elles ne sont pas indépendantes car $P(\lambda_1=3,\lambda_2=0)=P(X+Y=3,X=Y)=0$ alors que $P(X=Y)\neq 0$ et $P(X+Y=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=3)=2p^2(1-p)^2\neq 0$.

Exercice 79 *[sujet]* **1.** Il suffit de prendre $X_i\hookrightarrow\mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$

2. a) $X(\Omega)\subset[a,b]$ donc $E(X)\in[a,b]$ et $(X-E(X))(\Omega)\in[a-b,b-a]$ puis $(X-E(X))^2(\Omega)\in[0,(b-a)^2]$

b) Si $\alpha=\inf(X_i(\Omega))$ alors $\inf(X(\Omega))=n\alpha\geqslant a$ donc (idem de l'autre côté), $X_i(\Omega)\subset\left[\dfrac{a}{n},\dfrac{b}{n}\right]$

c) Par indépendance (deux à deux suffit) on a $V(X)=nV(X_i)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $V(X)=0$ et X est constante presque surement

Exercice 80 *[sujet]* **1.** $\{V(X),X\in\mathcal{E}\}$ est une partie de $\mathbb{R}^+$ (donc minorée) non vide (car $\mathcal{E}$ est non vide)

2. $V(X_1+X_2)=2V_0+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\overset{\text{C-Sch}}{\leqslant}2V_0+2V_0=4V_0$ donc, comme $\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)\in\mathcal{E}$, on a $V\left(\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)\right)=V_0$; on a donc $V(X_1-X_2)=2V_0-\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$ car on a égalité dans l'inégalité découlant de Cauchy-Schwarz donc $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)^2=V_0^2$.

Exercice 81 *[sujet]* **1.** f et g sont croissantes donc $f(X)-f(Y)$ et $g(X)-g(Y)$ sont du même signe. On a donc $E[(f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y))]\geqslant 0$ mais $E[(f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y))]=E[f(X)g(X)]-E[f(X)]E[g(Y)]-E[f(Y)]E[g(X)]+E[f(Y)g(Y)]$ car $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, puis $E[(f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y))]=2E[f(X)g(X)]-2E[f(X)]E[g(X)]$ car X et Y suivent la même loi et enfin, $\mathrm{Cov}(f(X),g(X))=E[f(X)g(X)]-E[f(X)]E[g(X)]=\dfrac{1}{2}E[(f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y))]\geqslant 0$

2. On introduit $X\hookrightarrow\mathscr{U}(n)$ sur $[\![1,n]\!]$, $f:t\mapsto a_{\lfloor t\rfloor}$ et $g:t\mapsto b_{\lfloor t\rfloor}$ qui sont croissantes. On a alors $\mathrm{Cov}(f(X),g(X))=E[f(X)g(X)]-E[f(X)]E[g(X)]$ puis $E[f(X)]=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(i)P(X=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$ (de même pour $E[g(X)]$) et $E[f(X)g(X)]=E[fg(X)]=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ pour les mêmes raisons.

Exercice 82 *[sujet]* **1.** $P(D_1 > D_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ donc (lancers indép) $X \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{5}{12}\right)$

2. $E(X) = \frac{5n}{12}$ et $V(X) = np(1-p)$

3. cours

4. $\frac{X}{E(X)} \in [0.9, 1.1] \Leftrightarrow |X - E(X)| \leqslant 0.1E(X)$ donc $p_n = P\left(|X - E(X)| \leqslant \frac{5n}{120}\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{(np)^2}$

Exercice 83 *[sujet]* $E(X) = n$ donc (Markov) $P(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$ puis $V(X) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc (BT), $P|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. Pour la dernière : $X \geqslant 2n \Rightarrow X - n = |X - n| \geqslant n$ donc $(X \geqslant 2n) \subset (|X - n| \geqslant n)$

Exercice 84 *[sujet]* On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$; on a $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$ par indépendance 2 à 2. Par B-Tch, on a $P(|S_n - E(S_n)| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}V(S_n)$. Comme $p_i(1-p_i) \leqslant \frac{1}{4}$, on en déduit $P(|S_n - E(S_n)| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\frac{n}{4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 85 *[sujet]* **1.** Cours

2. Si Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indép mais si $j \geqslant i+2$ alors Y_i et Y_j le sont.

3. $E(Y_i) = 2E(X_i) = 2p$ et $E(M_n) = 2p$ par linéarité. $V(Y_i) = 2V(X_i) = 2p(1-p)$ par indép puis $V(M_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1})\right) = \frac{2p(1-p)}{n} + \frac{n-1}{n^2}p(1-p)$ car par bilinéarité $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \operatorname{Cov}(X_i, X_{i+1}) + \operatorname{Cov}(X_i, X_{i+2}) + \operatorname{Cov}(X_{i+1}, X_{i+1}) + \operatorname{Cov}(X_{i+1}, X_{i+2}) = V(X_{i+1}) = p(1-p)$.

4. On applique B-Tch et on vérifie $\frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 86 *[sujet]* **1.** $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ donc $E\left(e^{x\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}\right) \overset{\text{transf}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{xk}\frac{e^{-nx/2}}{2^n} = \frac{e^{-nx/2}}{2^n}(1+e^x)^n = \left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n$

2. a) On a $f'(x) = \alpha - \frac{1}{2}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ donc f est maximale en $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\operatorname{th}\frac{x}{2} = 2\alpha$ (unique car th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$)

b) On commence par $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geqslant \alpha\right) = P\left(e^{x(S_n - n/2)} \geqslant e^{n\alpha x}\right) \overset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n}{e^{n\alpha x}} = e^{-nf(x)}$ et on choisit le x pour lequel f est maximale.

On fait de même pour $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leqslant -\alpha\right) = P\left(e^{x(n/2 - S_n)} \geqslant e^{n\alpha x}\right) \leqslant e^{-n\alpha x}E\left(e^{x(n/2-S_n)}\right) = e^{-nf(x)}$ puis on ajoute les 2 puisque $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geqslant \alpha\right) + P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leqslant -\alpha\right)$

Exercice 87 *[sujet]* **1.** $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y_n suit une loi de Bernoulli et $P(Y_n = 1) = P(U_n = U_{n+1} = 1) = p^2$ par indépendance donc $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^2)$

2. Pour $|n - m| \geqslant 2$

3. Si $|n - m| \geqslant 2$, on a $E(YnY_m) = E(Y_n)E(Y_m) = p^4$ et $E(Y_nY_{n+1}) = E(U_nU_{n+1}U_{n+2})$ car $U_{n+1}^2 = U_{n+1}$, puis par indépendance mutuelle, $E(Y_nY_{n+1}) = E(U_n)E(U_{n+1})E(U_{n+2}) = p^3$; par linéarité, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = p^2$

4. $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$; $V(Y_k) = p^2(1-p^2)$ et $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = p^3(1-p)$ donc $V(S_n) = np^2(1-p^2) - 2(n-1)p^3(1-p)$. On ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres car les Y_k ne sont pas deux à deux indépendantes mais avec B-T, on a $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 88 *[sujet]* **1.** $E\left(e^{uN}\right) = \sum_{k\geqslant 0} e^{uk}P(X = k) = e^{\lambda(e^u - 1)}$

2. Étudier $u \mapsto E\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)}\right) = \exp\left[\lambda(e^u - 1) - (1+y)\lambda u\right]$ (minimum en $u = \ln(1+y)$)

3. $P(N \geqslant (1+y)\lambda) = P\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)} \geqslant 1\right) \leqslant E\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)}\right)$ par inégalité de Markov (vad positive)

Exercice 89 *[sujet]* **1.** Si $f(t) = t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1})$ alors $f(0) = 0$ et $E(e^{tX_1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k} P(X_1 = x_k)$ donc $f'(0) = \varepsilon - \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k P(X_1 = x_k)}{E(e^0)} = \varepsilon - E(X_1) = \varepsilon > 0$ donc f est positive à droite de 0 donc prend des valeurs positives strictement (donc le sup n'est pas nul).

2. On applique l'inégalité de Markov à $e^{tS_n} \geqslant 0$: $P(S_n \geqslant n\varepsilon) = P(e^{tS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}) \leqslant e^{-tn\varepsilon} E(e^{tS_n})$; par indépendance mutuelle des (X_i) (résultat HP mais sans doute admis pour cet exercice) $E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = E(e^{tX_1})^n$ donc $P(S_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \exp\left[-n\left(t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1}))\right)\right]$; ceci est valable pour tout $t > 0$ donc on introduit une suite (t_k) telle que $t_k\varepsilon - \ln(E(e^{t_k X_1})) \xrightarrow[k \to +\infty]{} h_+(\varepsilon)$ et on obtient le résultat.

A nouveau en admettant l'indépendance de S_n (qui ne dépend que des X_i, $i \leqslant n$) et de $\sum_{k=1}^{m} X_{n+k}$, on a $P(S_n \geqslant n\varepsilon) P\left(\sum_{k=1}^{m} X_{n+k} \geqslant m\varepsilon\right) = P\left(S_n \geqslant n\varepsilon, \sum_{k=1}^{m} X_{n+k} \geqslant m\varepsilon\right)$ et $\left(S_n \geqslant n\varepsilon, \sum_{k=1}^{m} X_{n+k} \geqslant m\varepsilon\right) \subset (S_{n+m} \geqslant (n+m)\varepsilon)$

Exercice 90 *[sujet]* **1.** $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$ donc $a = 1$

2. $nP(X = n) \sim \frac{1}{n}$ donc $E(X)$ (et $V(X)$) n'existe pas

3. $G_X(t) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n} - \frac{t^n}{n+1} = -\ln(1-t) - \frac{1}{t}(-\ln(1-t) - t)$

Exercice 91 *[sujet]* **1.** $\sum_{k \geqslant 1} P(X = k) = \frac{1}{4} \sum_{h \geqslant 0} h \left(\frac{1}{2}\right)^{h-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1.$

2. Même calcul : $G_X(t) = \frac{t^2}{(2-t)^2}$ et $R = 2$

3. G_X est donc dérivable en 1 donc $E(X) = G'_X(1) = 4$

Exercice 92 *[sujet]* **1.** $P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$ et vérifier par IPP successives.

2. $P(X \leqslant n) = F_X(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt \sim n!$

3. $G_X(1) = \sum_{k \geqslant 0} P(X = k)$ et $G_X(-1) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k P(X = k)$ donc $P(X \in 2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}(G_X(1) + G_X(-1)) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$

4. $(XY \in 2\mathbb{N}) = (Y = 2) \cup (X \in 2\mathbb{N})$ donc $P(XY \in 2\mathbb{N}) = P(Y = 2) + P(X \in 2\mathbb{N}) - P(Y = 2)P(X \in 2\mathbb{N})$ par indépendance

Exercice 93 *[sujet]* **1.** Si $|x| < 1$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$

2. $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\sum_{n \geqslant 0} P(X = n) = r \frac{1}{\sqrt{1 - 1/2}} = r\sqrt{2}$ donc $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Pour $|t| < 2$, on a $G_X(t) = r \frac{1}{\sqrt{1 - t/2}}$ permet de tout calculer assez facilement

Exercice 94 *[sujet]* $G_{2X}(t) = E(t^{2X}) \overset{\text{transfert}}{=} \sum_{k \geqslant 0} t^{2n} P(X = n) = G_X(t^2)$ et $G_{X+1}(t) = E(t^{1+X}) = tG_X(t)$ par linéarité de l'espérance

Exercice 95 *[sujet]* $G_X(t) = \frac{t}{2} \frac{1}{1 - t^2/2} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$ donc $X(\Omega) = 2\mathbb{N}+1$ (presque surement) et $P(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Puis $Y(\Omega) = \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ et $P\left(Y = n + \frac{1}{2}\right) = P(X = 2n+1)$

Exercice 96 *[sujet]* **1.** cours : $G_S = G_X G_Y$ par indep

2. $G_S(t) = (p + (1-p)t)^n (p + (1-p)t)^m = (p + (1-p)t)^{n+m}$ donc $S \sim \mathscr{B}(n+m, p)$

3. $G_S(t) = \left(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\right)^2 = p^2t^2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}t^{n-1}$ si $|t| < \dfrac{1}{1-p}$ donc $P(S=n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ pour $n \geqslant 2$

Exercice 97 *[sujet]* **1.** On a obligatoirement $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (car Z ne prend que des valeurs $\geqslant 0$ donc $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$; puis Z prend la valeur 1 donc X et Y prennent la valeur 0 et si X prenait une valeur $x \notin \mathbb{N}$ alors Z prendrait la valeur $1+x+0 \notin \mathbb{N}$) donc $Y+1 \geqslant 1$ puis $0 \leqslant X \leqslant Z$ donc l'existence de $V(Z)$ implique celle de $V(X)$. Par linéarité, on a $\dfrac{1}{p} = E(Z) = 1 + 2E(X)$ car $E(X) = E(Y)$ donc $E(X) = \dfrac{1-p}{2p}$. De même $\dfrac{1-p}{p^2} = V(Z) = V(Z-1) = V(X) + V(Y)$ par indep donc $V(X) = \dfrac{1-p}{2p^2}$.

2. $G_Z(t) = tE(t^X t^Y) = tE(t^X)^2$ car t^X et t^Y sont indep et de même loi ; on a donc $G_X(t) = \sqrt{\dfrac{G_Z(t)}{t}} = \sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}$ puis $G_X(t) = \sqrt{p}[1-(1-p)]^{-1/2} = \sqrt{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}(1-p)^kt^k$ donc $P(X=k) = \sqrt{k}\dbinom{2k}{k}\dfrac{(1-p)^k}{4^k}$.

Exercice 98 *[sujet]* **1.** $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$

2. $P(X=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{e^{-1}}{k!}$ car $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

3. $p(n) + q(n) = P(X \in [\![0,n]\!]) = 1$ et $p(n) - q(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kp^k(1-p)^{n-k} = (1-2p)^n$ donc $p(n) = \dfrac{1}{2}(1+(1-2p)^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

4. non car $P(X=Y=n) = 0$ alors que $P(X=n)P(Y=n) \neq 0$.

Exercice 99 *[sujet]* Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ alors par indépendance, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_T(t) = [(1-p)+pt]^{n+m}$ donc $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^{k}\dfrac{P(X=i)}{p^i(1-p)^{n-i}}\dfrac{P(Y=k-i)}{p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}} = \dfrac{P(X+Y)=k}{p^k(1-p)^{n+m-k}} = \binom{n+m}{k}$.

Exercice 100 *[sujet]* **1.** $P(F=n) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}P(F=n|X=k)P(X=k)$ et $F_{(X=k)} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k, \dfrac{1}{2}\right)$ puis $G_F(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}P(F=n)t^n = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}P(F=n|X=k)P(X=k)t^n$; si on admet (dans un premier temps) la possibilité d'échanger les deux sommes, on a $G_F(t) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}t^n\right)\dfrac{1}{2^k}P(X=k) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^kP(X=k) = G_X\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$.

Reste à justifier cette interversion : pour $|t|<1$ et $N \in \mathbb{N}$, on a $\Delta_N = \left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\sum_{k\geqslant 0}P(F=n|X=k)P(X=k)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k\geqslant 0}P(F=\right.$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant N+1}P(F=n|X=k)P(X=k)|t|^n$ et $P(F=n|X=k) \leqslant 1$ donc $\Delta_N \leqslant \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\dfrac{|t|^{N+1}}{1-|t|}P(X=k) = \dfrac{|t|^{n+1}}{1-|t|} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors $G_F(t) = \exp\lambda\left(\dfrac{1-t}{2}-1\right) = e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)}$ donc $F \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$.

Si $1+X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors $G_X(t) = E(t^{(1+X)-1}) = \dfrac{1}{t}G_{1+X}(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)t}$ donc $G_F(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)\frac{1+t}{2}} = \dfrac{2p}{1+p}\dfrac{1}{1-\frac{1-p}{1+p}t}$ donc $1+F \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2p}{1+p}\right)$

Exercice 101 *[sujet]* $1 - G_X(r) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(1-r^k)P(X=k) \geqslant \sum_{k\geqslant n}(1-r^k)P(X=k) \geqslant (1-r^n)\sum_{k\geqslant n}P(X=k) = (1-r^n)P(X\geqslant n)$. Si on a égalité alors on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-r^k)P(X=k) = 0$ et $(1-r^n)\displaystyle\sum_{k\geqslant n}P(X=k) = \sum_{k\geqslant n}(1-r^k)P(X=k)$ ce qui donne respectivement $P(X=k)$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ et $P(X=k)=0$ pour $k\geqslant n+1$ donc $X(\Omega) = \{0,n\}$ presque surement ; réciproque facile

Exercice 102 *[sujet]* **1.** $G_X^{(k)}(1) = \sum_{i=0} ni(i-1)\dots(i-k+1)P(X=i)$ et $u_k(X) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)P(X=i)$ donc $G_X^{(k)} = u_k(X)$

2. On applique la formule de Taylor au polynôme G_X : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{G_X^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(X)}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}(-1)^k - jt^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} u_k(X)\frac{1}{j!(k-j)!}(-1)^k - jt^j$ d'où le résultat en identifiant le coefficient de t^j

Exercice 103 *[sujet]* **1.** $T_n = X_1 + \dots + X_n$ où $X_k \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ (chaque X_i est le temps d'attente d'un nouveau 6) ; le X_i sont mutuellement indépendantes dans $G_{T_n}(t) = G_{X_1}^n(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^n$ avec $p = \frac{1}{6}$. On en déduit $P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ si $k \geqslant n$.

2. $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et si $(Y_n = k)$ correspond à la situation suivante : on a effectué exactement $k+n$ lancers pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ; on a donc un succès au lancer $k+n$ et on doit répartir les $n-1$ autres succès sur les $k+n-1$ autres lancers (il y a $\binom{k+n-1}{n-1}$ possibilités de répartition) donc $P(Y_n = k) = \binom{n+k-1}{n-1}p^n(1-p)^k$. On en déduit $G_{Y_n}(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^n$.