Correction du DS3

(d'après CCINP PC 2018)

Partie I :

1. $\boxed{L_0 = U_0 = 1}$ puis $U_1 = X^2 - 1$ donc $\boxed{L_1 = X}$ et $U_2 = X^4 - 2X + 1$ donc $\boxed{L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)}$

2. $\deg(U_n) = 2n$ donc $\deg(L_n) = 2n - n = n$ et le coefficient dominant de L_n provient de la dérivation $2n$ fois du terme X^{2n} de U_n donc $a_n = \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\dots(n+1)$, ie $\boxed{a_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}}$

3. U_n est pair donc $\forall x \in \mathbb{R}, U_n(x) = U_n(-x)$, ce qui donne en dérivant n fois, $L_n(x) = (-1)^n L_n(-x)$ donc $\boxed{L_n \text{ est pair (resp. impair) si } n \text{ est pair (resp. impair)}}$

4. ϕ est linéaire par linéarité de la dérivation.

5. fait en cours

6. On remarque que $\phi(P) = \left[(X^2-1)P'\right]'$ et on effectue une IPP : les polynômes Q et $(X^2-1)P'$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ donc $\langle \phi(P), Q\rangle = \Big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$.

Cette expression est invariante en échangeant P et Q donc $\langle \phi(P), Q\rangle = \langle \phi(Q), P\rangle$ puis $\boxed{\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle}$ par symétrie du produit scalaire.

7. a) $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$ donc $(X^2-1)U_k' = 2kXU_k$

b) Par la formule de Leibniz, on a $\left[(X^2-1)U_k'\right]^{(k+1)} = (X^2-1)U_k^{(k+2)} + (k+1)2XU_k^{(k+1)} + \frac{k(k-1)}{2}2U_k^{(k)}$ et $\left[XU_k\right]^{(k+1)} = XU_k^{(k+1)} + (k+1)U_k^{(k)}$ donc on déduit de l'égalité de la question précédente la relation demandée : $\boxed{(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0}$

c) En divisant cette égalité par $2^k k!$, on obtient $(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0$ donc $\boxed{\phi(L_k) = k(k+1)L_k}$

8. On a $\langle \phi(L_k), L_h\rangle = k(k+1)\langle L_k, L_h\rangle$ et avec **6**, $\langle \phi(L_k)L_h\rangle = \langle L_k, \phi(L_h)\rangle = h(h+1)\langle L_k, L_h\rangle$ donc on en déduit $k(k+1)\langle L_k, L_h\rangle = h(h+1)\langle L_k, L_h\rangle$. Si $h \neq k$ alors $k(k+1) \neq h(h+1)$ donc $\langle L_k, L_h\rangle = 0$ et $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale. Tous les L_k étant non nuls, cette famille est libre, constituée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ (qui est de dimension $n+1$) donc $\boxed{(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$

9. a) L_n est orthogonal à $L_0, \dots, L_{n-1}$ donc $L_n \in \mathrm{Vect}\{L_0, \dots, L_{n-1}\}^\perp = \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

b) Le polynôme Q change de signe exactement en même temps que L_n sur $]-1,1[$ donc L_nQ garde un signe constant sur $[-1,1]$. De plus, comme $p \leqslant n-1$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle Q, L_n\rangle = 0$. Comme $\langle Q, L_n\rangle = \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et que QL_n est continue et de signe fixe sur $[-1,1]$, on en déduit $\forall t \in [-1,1], Q(t)L_n(t) = 0$ donc L_n s'annule en une infinité de points (tous les points de $[-1,1]$ autres que les c_i), ce qui est absurde car $L_n \neq 0$.

c) On en déduit que L_n doit changer de signe au moins n fois sur $]-1,1[$ donc, comme L_n est continue, il possède donc au moins n racines dans $]-1,1[$. Comme $\deg(L_n) = n$, L_n ne peut pas avoir plus de n racines. Les n racines trouvées dans $]-1,1[$ sont donc toutes les racines de L_n et elles sont forcément simples. En résumer, $\boxed{L_n \text{ est scindé à racines simples dans }]-1,1[}$

10. a) $\deg(L_{n+1}) = \deg(XL_n) = n+1$ et le coefficient de X^{n+1} dans le polynôme $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n$ est $(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0$ donc $\boxed{(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n \in \mathbb{R}_n[X]}$

Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tels que $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$.

b) $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale, donc, pour $j \leqslant n$, $\langle (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n, L_j\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle L_i, L_j\rangle = \alpha_j \|L_j\|^2$ et $L_j \neq 0$ donc $\alpha_j = \frac{\langle (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n, L_j\rangle}{\|L_j\|^2}$

D'autre part, $\langle (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n, L_j\rangle = (n+1)\langle L_{n+1}, L_j\rangle - (2n+1)\langle L_n, XL_j\rangle = 0$, si $j \leqslant n-2$, car $L_{n+1} \perp L_j$ et $XL_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $L_n \perp XL_j$. On en déduit $\boxed{\alpha_j = 0 \text{ si } j \leqslant n-2}$

c) L_n est soit pair, soit impair donc L_n^2 est pair et XL_n^2 est impair. On a alors, comme à la question précédente $\langle (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n, L_n\rangle = (n+1)\langle L_{n+1}, L_n\rangle - (2n+1)\langle XL_n, L_n\rangle = -(2n+1)\int_{-1}^{1} tL_n(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ puisqu'on intègre sur $[-1,1]$ une fonction impaire. On a donc $\boxed{\alpha_n = 0}$

d) Le coefficient de degré $n-2$ dans L_n est $b_n = \dfrac{1}{2^n n!}(-2n) \times (2n-2)(2n-3)\dots(n-1)$ (il provient de la dérivation $2n$ fois du terme $-2nX^{2n-2}$ dans U_n). En identifiant le coefficient de degré $n-1$ dans la relation $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n = \alpha_{n-1}L_{n-1}$, on obtient $(n+1)b_{n+1} - (2n+1)b_n = \alpha_{n-1}a_{n-1}$, qui donne, avec les valeurs de a_{n-1}, b_n et b_{n+1}, $\alpha_{n-1} = -n$ donc $\boxed{(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0}$