PSI2 | **DM13** | pour le 3 février 2025

DM13

(d'après CCP PC 2012 maths 2)

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

1. a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

b) Justifier que l'application L_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

c) Montrer que : $\forall x \in]-1,1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)$.

2. a) Pour $x \in]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.

b) Pour $x \in]-1,1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \leqslant -1$.
Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie II : expression intégrale

Dans cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

1. a) Montrer que L_α est continue sur $[-1,1]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

2. a) Montrer que, si $x \leqslant 1$, l'application $\varphi_x : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Pour $x \leqslant 1$, on posera dans la suite

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,\mathrm{d}u$$

b) Prouver l'existence de $G_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

3. a) Montrer que pour $x \in [-1,1]$, on a $xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x)$.

b) En déduire que L_α se prolonge en une fonction continue sur $]-\infty,1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.
Donner la valeur de $L'_\alpha(x)$ pour $x < 1$.

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \notin]1,+\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha\left(z^2\right)$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On admettra dans cette partie que $L_2(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer la valeur de $L_2(-1)$.

2. a) Montrer que $\phi : x \mapsto L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

b) En déduire que ϕ est constante sur $]0,1[$ et déterminer la valeur de $L_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Prouver que

$$\forall x \in \left[-1,\frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}[\ln(1-x)]^2$$