TD18 : Variables aléatoires

Exercice 1 **(CCINP PSI 2022)**
On étudie une succession de lancers d'une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » ($(X = k)$ si pile au lancer k et face au lancer $k+1$). Y est le rang du premier pile « pile »

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2023)**
Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

1. Déterminer la loi de Y. *(*)*
2. Reconnaître $Y - 1$ et en déduire $E(Y)$
3. Déterminer la loi du couple (Y, Z).
4. Déterminer la loi et l'espérance de Z

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A vérifie (P) si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$

1. Donner des exemples de matrices vérifiant (P)
2. X_1, X_2, X_3 sont trois variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A vérifie (P) ? *(*)*

Exercice 5 **(CCINP PSI 2021)**
Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, N = n)$.
3. Calculer $P(X = k)$. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 **(CCINP PSI 2023)**
Soient α, β deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X et Y
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X - Y$; déterminer la loi de Z
4. Déterminer $P(Y = j | Z = n)$ et conclure

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.

1. On pose $S = X + Y$, trouver la loi de S.
2. Reconnaître la loi de X sachant $(S = k)$.
3. Soit Z une variable aléatoire discrète indépendante de X et Y, telle que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z > n + 1 | Z > n) = 1 - p$, reconnaître $1 + Z$.
4. Calculer $P(S = Z)$

Indications

Exercice 2

1. *Décrire $(Y = k)$ en fonction des variables $X_1, \ldots, X_k$ qui donnent le numéro du jeton au i$^{\text{ème}}$ tirage.*

Exercice 4

2. *Commencer par calculer $\mathcal{X}_A$ pour trouver à quelle condition A vérifie (P).*