

**ΠΣΙ2. Exercices d'induction. Quelques corrigés.****NeumannA) Antenne-cadre. NE PAS OUBLIER LES N SPIRES.**

On calcule :  $\varphi = NSB_o \cos(2\pi ft)$  donc la fem induite est  $e(t) = -\dot{\varphi} = 2\pi fNSB_o \sin(2\pi ft)$  dont l'amplitude est  $E = 2\pi fNSB_o = 0,19 V$ .

**NeumannB) Calcul de d'autoinduction.**

Si on note Oz l'axe du solénoïde et n le nombre de spires par unité de longueur, le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est  $\vec{B}(M) = \mu_o ni \vec{e}_z$  ; il est nul à l'extérieur.

Si on admet que la formule est aussi valable sur la bobine avec  $n = \frac{N}{\ell}$ , on peut donc calculer le flux propre à travers une spire :  $\phi_o = S\mu_o \left(\frac{N}{\ell}\right) i$

et le flux total à travers les N spires est donc :  $\phi = N\phi_o = \left(\mu_o \frac{SN^2}{\ell}\right) i = Li$

Si l'intérieur de la bobine est rempli de magnétique, il faut remplacer  $\mu_o$  par  $\mu_o \mu_r$  dans les calculs et l'inductance est multipliée par  $\mu_r$  soit environ 1000 ici.

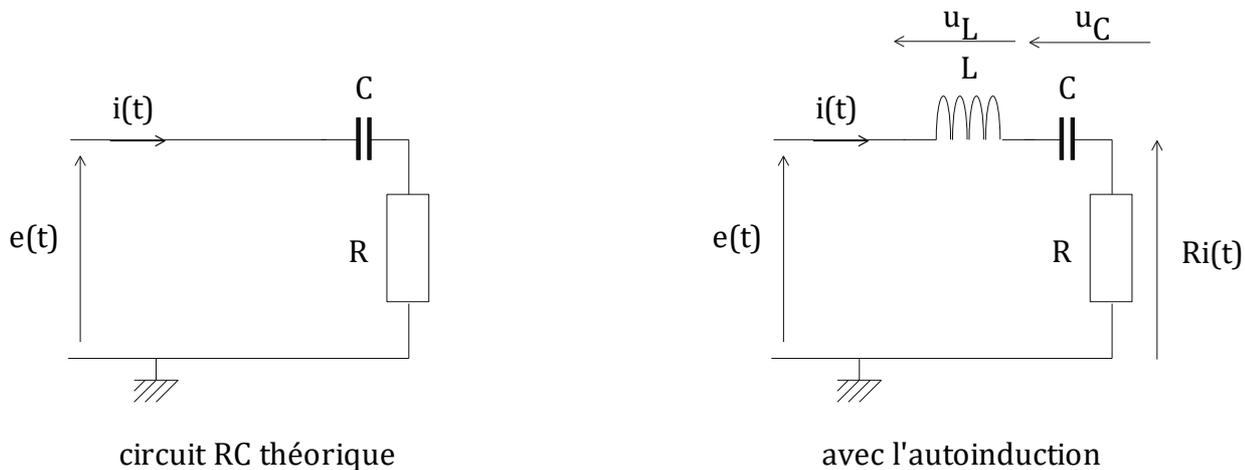
Pour un circuit quelconque, on peut faire une AD, ce qui donne ici  $L \approx \mu_o a$ .

Un circuit typique de TP peut être assimilé à une spire de rayon  $a \approx 0,1m$ , ce qui permet d'évaluer son autoinductance à  $L \approx 10^{-7}H$ .

Reprenons la réponse indicielle d'un circuit RC habituel. On prends  $R = 1k\Omega$ ,  $C = 100nF$ .

Pour  $t < 0$ ,  $e(t) = 0$ , condensateur déchargé et courant nul.

Pour  $t > 0$ ,  $e(t) = E$



Pour le circuit théorique à gauche, on calcule :  $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

On a : une discontinuité à  $t=0$ ,  
une décroissance exponentielle de constante de temps  $\tau = RC = 0,1ms$ .

Si on tient compte de l'autoinductance L, on obtient le circuit de droite.

**Obtention des conditions initiales :**

On a continuité du courant à cause de L, et continuité de  $u_C$  à cause du condensateur. On a donc :

$$i(O^+) = i(O^-) = 0 \quad u_C(O^+) = u_C(O^-) = 0$$

La LDM donne :  $e(O^+) = E = u_C(O^+) + u_L(O^+) + Ri(O^+) = 0 + u_L(O^+) + 0$

On en déduit :  $\frac{di}{dt}(O^+) = \frac{E}{L}$

L'équation diff vérifiée par  $i(t)$  est pour  $t > 0$  :  $LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \cdot \frac{de}{dt} = 0$

Résolution de l'équa diff :

Une solution particulière est la fonction nulle. Pour obtenir une base de l'espace vectoriel de la solution générale sans second membre (de dimension 2), je peux chercher une solution sous les formes équivalentes :

$$A. \exp(\tau t) \quad A. \exp(-\tau t) \quad A. \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad A \text{ non nul}$$

Je prends la dernière pour faire apparaître directement les constantes de temps. J'envoie le forme dans l'équa diff qui devient un polynôme de degré 2 ( d'où les deux solutions) :

$$LC \left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 + RC \left(-\frac{1}{\tau}\right) + i = 0 \quad \text{soit} \quad \tau^2 - RC\tau + LC = 0$$

$$\Delta = R^2C^2 - 4LC = R^2C^2(1 - 4Q^2) \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 10^{-3}$$

Les deux solutions sont :

$$\tau_- = \frac{RC - RC\sqrt{1-4Q^2}}{2} = \frac{RC}{2} \left(1 - \sqrt{1-4Q^2}\right) \approx \frac{RC}{2} \left(1 - (1 - 2Q^2)\right) = \frac{L}{R} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

$$\tau_+ = \frac{RC + RC\sqrt{1-4Q^2}}{2} \approx RC = 10^{-4} \text{ s} \quad \text{la solution du circuit du premier ordre.}$$

On a maintenant 2 solutions qui définissent une base de l'ensemble des solutions. La solution générale s'écrit maintenant :

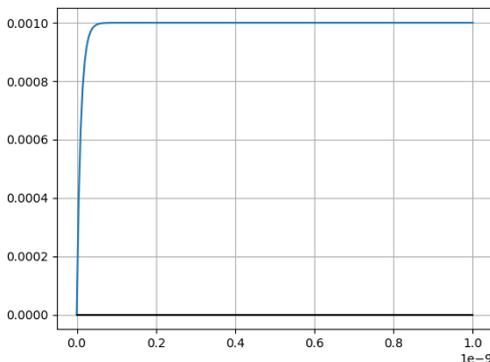
$$i(t) = A. \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) + B. \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right)$$

Au bout d'environ 1ns , on ne voit plus le premier terme. L'oscilloscope (bande passante de 100MHz, il faudrait au moins 10GHz) ou l'ordinateur (2μs au moins entre 2 mesures) ne sont pas assez rapides pour le voir.

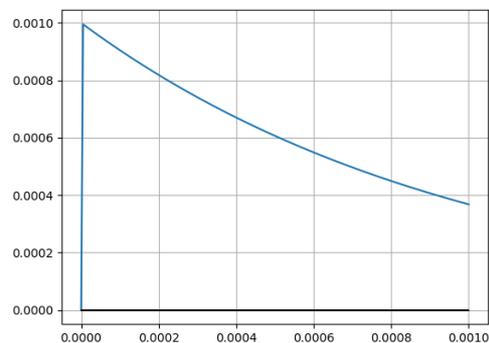
Avec les CI déjà calculées, on peut sortir la solution approchée :

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right\}$$

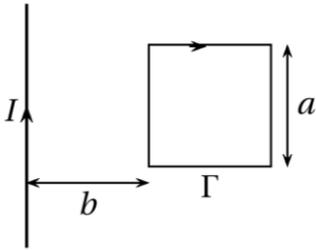
Représentation graphique :



Sur 1ns



sur 1ms

**NeumannC) Calcul de mutuelle induction.**

On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz (le fil) vertical vers le haut. La base locale est  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

Grâce au théorème d'Ampère, on calcule le champ magnétique créé par le fil en tout point M de l'espace, sauf sur l'axe. Méthode habituelle abrégée, on obtient :

$$\vec{B}_{fil}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Le cadre semble orienté dans le sens horaire. dans ce cas, son vecteur normal est :  $\vec{n} = +\vec{e}_\theta$

On calcule maintenant le flux du champ magnétique à travers le cadre :

$$\phi = \iint_{M \in S} \vec{B}_{fil}(M) \cdot (\vec{e}_\theta) dS = \iint_{M \in S} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \left\{ \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{a+b}{b} \right) \right\} I = MI$$

r varie entre b et b+a ; z varie entre  $z_0$  et  $z_0+a$ . Ici, M est positive.

**Neumann E. Résonance d'un oscillateur harmonique.**

1) La loi des mailles, appliquées deux fois donne :

$$e(t) = LC\ddot{u}_1 + MC\ddot{u}_2 + u_1 \quad LC\ddot{u}_2 + MC\ddot{u}_1 + u_2 = 0$$

2) Avec la notation complexe où on remplace chaque grandeur électrique  $x(t) = X \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  par son amplitude complexe  $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ , dériver par rapport au temps revient à multiplier par  $j\omega$ . On obtient :

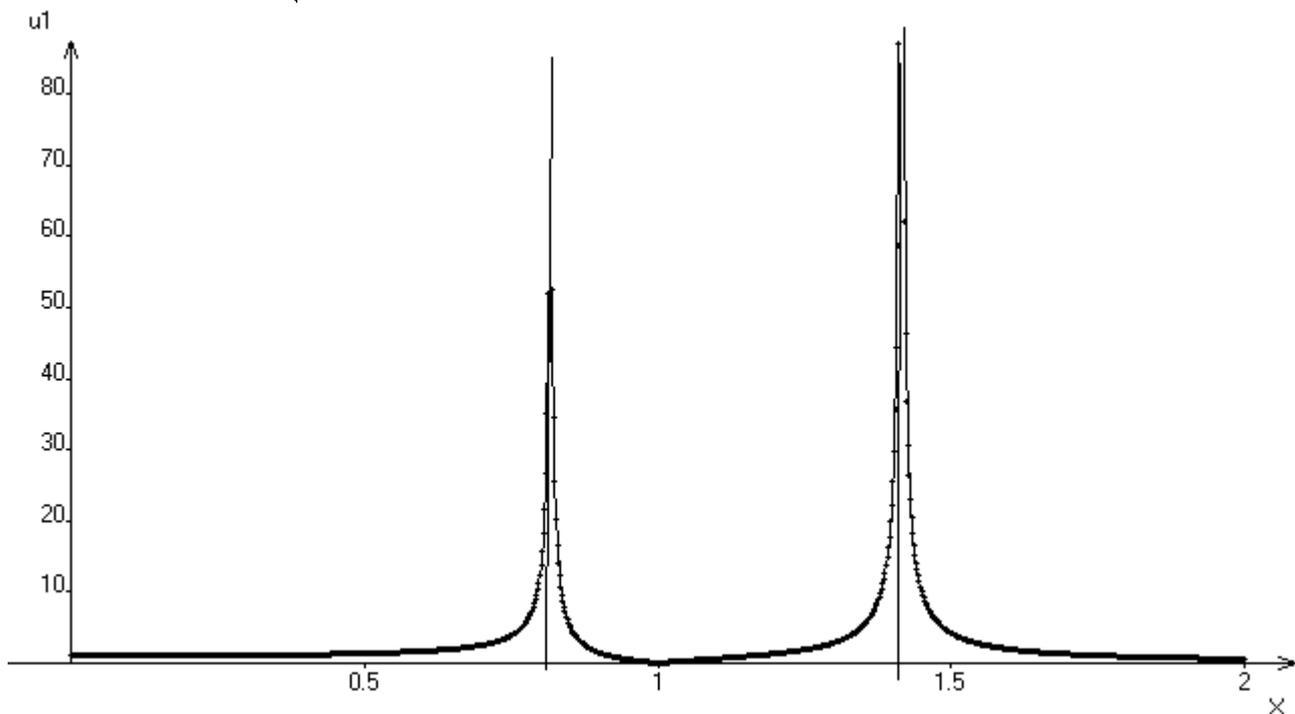
$$E = -LC\omega^2 \underline{U}_1 - MC\omega^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_1 \quad -LC\omega^2 \underline{U}_2 - MC\omega^2 \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0$$

Ne reste alors qu'à éliminer  $\underline{U}_2$  entre les deux équations et on trouve  $n=p=2$ .

3) Si on fait  $k=0$ , on a divergence de  $\underline{U}_1$  pour  $X=1$ . On a donc une résonance. Dans la réalité, les frottements (résistances des circuits) limitent l'amplitude du pic. Eventuellement, l'oscillateur harmonique peut être détruit.

4) Si  $k$  n'est pas nul, on s'aperçoit que la résonance devient anti-résonance. Il apparaît deux résonances en  $X_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k}}$  et  $X_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$ .

Pour  $k=0,5$ , on représente  $u_1 = ||\underline{U}_1||/E$  en fonction de la pulsation réduite  $X$  et on observe deux résonances en  $X_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82$  et  $X_2 = \sqrt{2} \approx 1,4$  et une antirésonance pour  $X=1$ .



On voit ici l'intérêt du couplage : une résonance importante d'un oscillateur peut être transformée en antirésonance grâce au couplage avec un autre oscillateur. Cependant, on fait apparaître deux autres résonances.

NeumannF.

INFLUENCE DE BOBINE 1 SUR ELÉMENT  $L_1 i_1 = L i$

\_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_  $L_2 i_2 = L i$

\_\_\_\_\_ 1 SCUB BOBINE 2  $\pi i_1 = M i$

\_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 1  $\pi i_2 = M i$

↳ INFLUENCE TOTALE  $\Phi = \underbrace{2(L+M)}_{L_{eq}} i$  AVEC  $M = \pm |M|$

AVEC LES VALEURS NUMÉRIQUES FOURNIES, + CORRESPOND À  $L_1$  ET - À  $L_2$

$$L_1 = 2(L+|M|)$$

$$L_2 = 2(L-|M|)$$

⇒

$$L = \frac{L_1 + L_2}{4} \simeq 44,8 \text{ mH}$$

$$\pi = \frac{L_1 - L_2}{4} \simeq 7,1 \text{ mH}$$

$$\text{Et } R = \frac{|M|}{L} \simeq 0,16$$

LA RÉSONNANCE D'INTENSITÉ DU CIRCUIT (RLC) SÉRIE

A LIEU À LA PULSATION  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . SI ON CONNAÎT C

ET QU'ON REUNE  $\omega_0$ , ON A ACCÈS À L-

**NeumannG.Mines Ponts 2014 psi. Etude d'une pince ampèremétrique.**

13) L'ARQS consiste à supposer la propagation quasiment instantanée en électromagnétisme, ce qui revient à prendre  $c$  infini. Le courant de déplacement disparaît alors de l'équation de MA. Le théorème d'Ampère s'écrit alors comme en statique : la circulation du champ magnétique sur un contour fermé est égal au courant enlacé par le contour divisé par  $\mu_0$ .

14) Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie physique pour la distribution de courant donc le champ magnétique est orthoradial. Le système de courants est ensuite invariant par rotation quelconque d'axe Oz. On peut donc écrire :  $\vec{B}(M, t) = B(r, z)\hat{u}_\theta$ . On ne va éliminer  $z$  du calcul que lors de l'application du théorème d'Ampère sur un cercle d'axe Oz et de rayon  $r$  correctement orienté, et intérieur au tore. Le courant enlacé est alors  $i(t) + Ni_1(t)$  et on obtient :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0(i + Ni_1)}{2\pi r} \hat{u}_\theta$$

15) Le vecteur normal d'une spire rectangulaire est  $\hat{u}_\theta$ . On calcule donc :

$$\phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M, t) \cdot \hat{u}_\theta dS = \iint_{M \in S} \frac{\mu_0(i + Ni_1)}{2\pi r} dr dz = \left\{ \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\} (i + Ni_1) = Li_1 + Mi$$

On sort donc :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{L}{N}$$

16) Le périmètre d'une spire est :  $(b-a)+c$  ; on a  $N$  spires donc la longueur totale de fil est  $N(b+c-a)$  et la résistance est  $R_p = \lambda(b+c-a)$ .

17) En circuit fermé, la tension aux bornes du bobinage est nulle et on obtient :

$$R_p i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di}{dt} = 0 \text{ soit en RSP}(\omega): (R_p + jL\omega)\underline{i}_1 + jM\omega\underline{i} = 0$$

Et la fonction de transfert harmonique est :  $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = -\frac{jM\omega}{R_p + jL\omega}$ .

18) Pour que la pince fonctionne correctement, il faut que la mesure de  $i_1$  donne directement  $i$  donc que les deux courants soient proportionnels, ce qui sera vrai à haute fréquence pour  $\omega \gg \frac{R_p}{L}$  et on aura alors  $i = -Ni_1$ .

Dans ce cas, le courant dans la pince est une image du courant dans le fil et on n'a pas besoin d'ouvrir le circuit électrique pour faire une mesure.

**NeumannH)Antenne réceptrice.**

Question préliminaire :  $\lambda = 3 \text{ m}$ .

1) Avec les indications de l'énoncé, en choisissant l'origine des temps pour avoir une phase nulle en  $y=0$ , on peut écrire le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_o \cos(\omega t - ky) \vec{u}_z$$

2) C'est une OPPH, donc on peut utiliser :  $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_y \wedge \vec{E} = \frac{E_o}{c} \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$

3) On a un champ magnétique variable dans le temps, donc le flux de ce champ à travers les N spires de ce cadre sera aussi variable dans le temps et sa dérivée temporelle non nulle. On aura donc une fem d'induction non nulle dans le cadre. Le calcul sans approximation est assez lourd. Vous remarquerez qu'on ne vous le demande pas.

4) A un instant donné, 3m est la distance nécessaire pour voir une oscillation totale. Donc, sur une distance de 5cm, le champ magnétique varie peu. On va donc le considérer comme uniforme sur la section du cadre, ce qui transforme l'intégrale en produit. On obtient alors :

$$\phi = N \iint_{M \in \text{cadre}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = N \frac{E_o}{c} \cos(\omega t - ky(O')) \iint_{M \in \text{cadre}} \vec{u}_x \cdot \vec{n} dS = \frac{Na^2 E_o}{c} \cos(\omega t - ky(O')) \cos(\theta)$$

D'où :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{Na^2 E_o \omega}{c} \cos(\theta) \sin(\omega t - ky(O'))$$

D'amplitude :  $\text{Amp}\{e(t)\} = \frac{Na^2 E_o \omega}{c} |\cos(\theta)|$

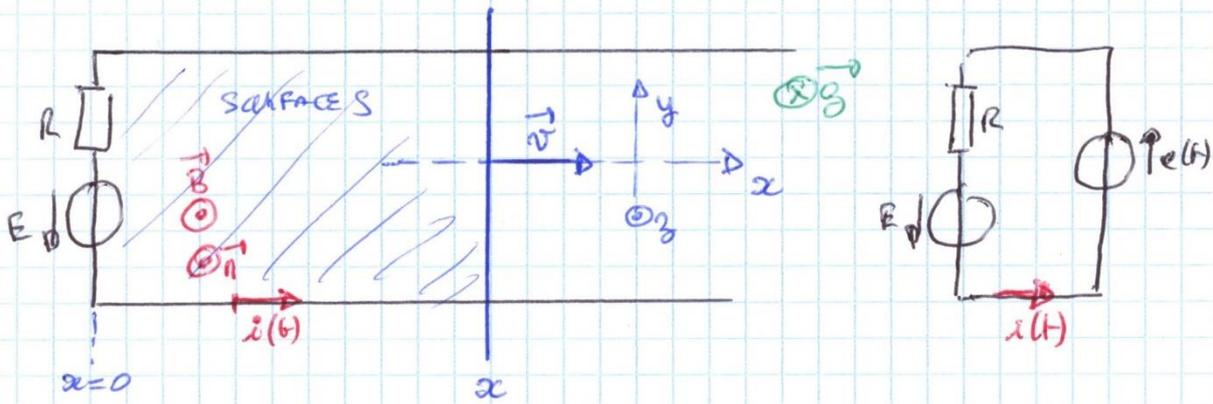
L'amplitude est maximale pour  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

5) On suppose l'émission isotrope. Comme il n'y a pas d'absorption prise en compte, la puissance surfacique à la distance D est donc :  $P_S(D) = \frac{P}{4\pi D^2}$  que nous allons associer à la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'OPPH qui donne donc :

$$P_S(D) = \frac{P}{4\pi D^2} = |\vec{\Pi}| = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} \quad \text{et on déduit : } E_o = \sqrt{\frac{2\mu_o c P}{4\pi D^2}} \approx 0,0055 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Et on évalue :  $\text{Amp}\{e(t)\} \approx 0,55 \text{ mV}$

**LorentzA.**



Ⓐ A t=0,  $\vec{v} = \vec{0}$ , la fem. d'induction est nulle, on obtient  $i(0) = \frac{E}{R} > 0$ , donc force de Laplace non nulle sur la barre qui se met donc en mouvement

Ⓑ  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S B_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \cdot dS = B \iint dS = BS = Blx$

↳  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$

Puis (CDE)  $\Rightarrow \boxed{E + e = Ri} \quad \boxed{E - Blv = Ri}$

Ⓒ SYSTEME : BARRE MOBILE  
 FORCES EXT : || POIDS  $m\vec{g}$  LES DEUX FORCES DE LIASON SUR LES RAILS  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$   
 FORCE DE LAPLACE  $\vec{F} = Bli \vec{e}_x$

ABSENCE DE FROTTEMENTS : LES DEUX FORCES DE LIASON SONT PERPENDICULAIRES AU DEPLACEMENT

PFD  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F} \Rightarrow \boxed{m\dot{v} = Bli}$

Ⓓ EN POSANT  $v = \dot{x}$  :  $\boxed{E - Bl\dot{x} = Ri} \quad \boxed{m\dot{v} = Bli}$

ET ON ELIMINE  $Bli$  ENTRE LES DEUX EQUATIONS

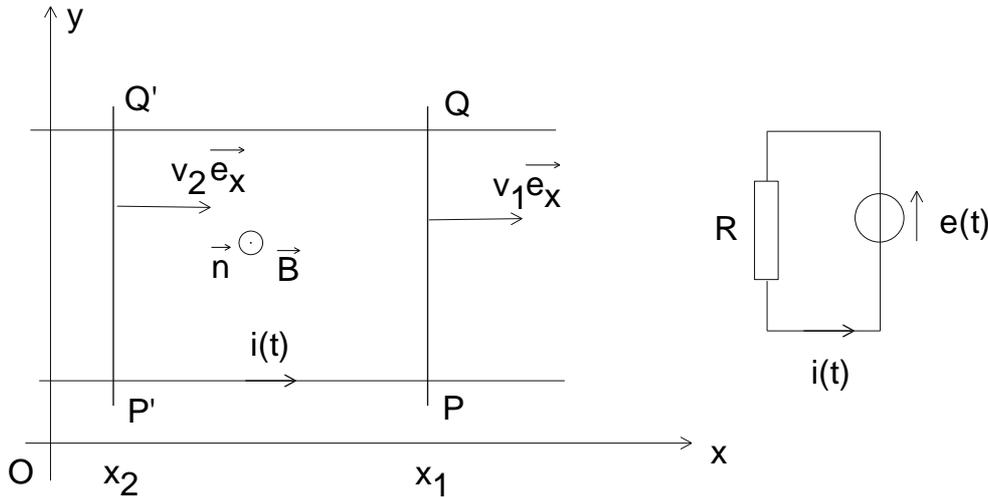
↳  $\boxed{Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)}$

L'ENERGIE FOURNIE PAR E  
 \* EST CONSOMMEE DANS R PAR EFFET JOULE  
 + QU'ESTRIVIENT DE L'ENERGIE CINETIQUE  
MOTEUR ELECTRIQUE

ON OBTIENT AUSSI

$\boxed{e + Fv = 0}$

TRANSFERT ELECTROMECANIQUE DE  
 PUISSANCE A 100%

**LorentzB. Interaction de deux tiges.****Question 2. Aspect calcul pour vérifier l'étude de la question 1.**

La description mécanique avec son modèle électrique.

Equation électrique :

Le flux est  $\varphi = Bd(x_1 - x_2)$  et donc  $e(t) = -\dot{\varphi} = -Bd(v_1 - v_2) = Ri$  par la LDM.

Equations mécaniques.

Référentiel terrestre galiléen,

Système 1 : tige 1.

Forces appliquées : Force de Laplace  $\vec{F}_1 = dBi \vec{e}_x$ , poids et forces de liaison verticales. Le PFD en projection sur  $Ox$  donne :  $mv_1 = iBd$  ( $\alpha$ )

Le même processus avec la tige 2 donne :  $mv_2 = -iBd$  ( $\beta$ )

$(\alpha) + (\beta)$  donne :  $v_1 + v_2 = 0$  qui s'intègre en  $v_1 + v_2 = Cte = v_0$  ( $\gamma$ )

$(\alpha) - (\beta)$  et l'équation électrique donne avec  $v = v_1 - v_2$   $\frac{mR}{2B^2d^2} \dot{v} + v = \tau \dot{v} + v = 0$

On résoud alors avec les CI :  $v(t) = v_1 - v_2 = v_0 \cdot e^{-t/\tau}$  ( $\delta$ )

Puis  $(\gamma) \pm (\delta)$  donne finalement :

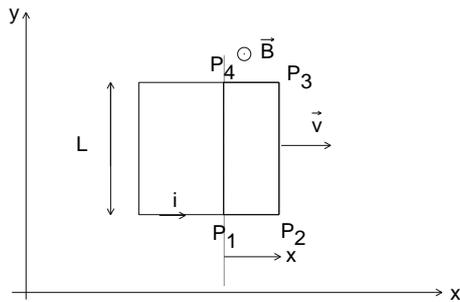
$$v_1(t) = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-t/\tau})$$

Soit des valeurs limites égales à  $\frac{v_0}{2}$  pour les deux tiges.

On remarque que la moitié de l'énergie cinétique initiale a disparu. Elle a en fait été consommée par la résistance  $R$ . Vous pouvez vérifier par le calcul car vous avez aussi  $i(t)$  donc  $P = Ri^2(t)$  que vous pouvez intégrer par rapport au temps entre 0 et  $+\infty$ .

**LorentzC)Freinage par induction.**

Aspect quantitatif quand le cadre rentre dans une zone de champ magnétique.



Le cadre a pénétré de  $x$  dans la zone et est orienté dans le sens trigonométrique.

**Aspect électrique :**

Le flux vaut :  $\phi = BLx$  donc la fem d'induction est  $e = -\frac{d\phi}{dt} = -BL\dot{x} = -BLv$

La LDM donne alors  $e = -BLv = Ri$

**Aspect mécanique :**

Il y a trois forces de Laplace appliquées sur le cadre : parties  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ .

La première et la dernière s'éliminent mutuellement. Le calcul sur la partie  $P_2P_3$  donne  $\vec{F} = iLB\vec{e}_x$ .

En ne tenant compte d'aucune autre force extérieure, le PFD sur le cadre donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{qui donne sur } Ox \quad m\frac{dv}{dt} = iLB$$

En éliminant le courant entre les deux équations, on obtient le comportement demandé :

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{(BL)^2}$$

Faites maintenant la même étude à la sortie. On obtient la même équation différentielle.

Si maintenant, on est dans le cas où on optimise le freinage, on a alors  $D=d=L$  et l'équation différentielle ci-dessus est valable à tout instant.

On fixe l'instant  $t=0$  pour lequel le cadre entre dans la première zone de champ magnétique avec la vitesse  $v_0$ .

On peut alors résoudre :  $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)$

On obtient aussi  $x(t)$  en mettant l'origine à  $t=0$  :  $x(t) = \tau v_0 \left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\}$

La vitesse décroît exponentiellement mais ne s'annule jamais : le temps de freinage est idéalement infini. Expérimentalement, on l'évaluera à quelques  $\tau$ .

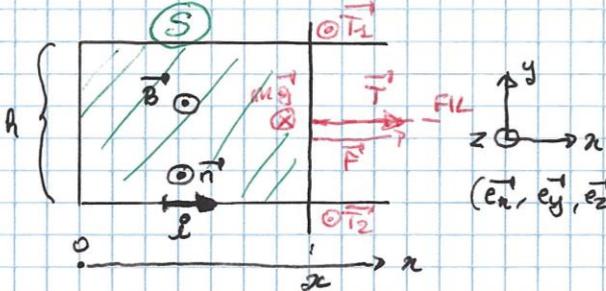
Par contre, on a la distance de freinage :  $x(t \rightarrow +\infty) = \tau v_0$  qui est finie.

L'énergie cinétique du cadre est consommée par effet Joule. La température du cadre va donc augmenter. Avec des notations que je vous laisse développer :

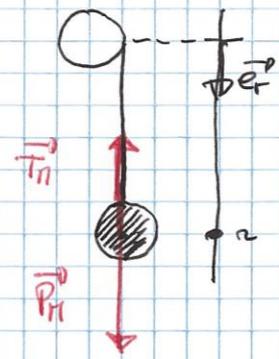
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = C_p(T_f - T_i)$$

**LORENTZ D**

**DESSINS ET CHOIX D'ORIENTATION.**



**ATTENTION** M N'EST PAS EN CHUTE LIBRE  $\vec{n} \neq \vec{g}$



**SYSTEME** : la barre

**FORCES APPLIQUEES** :  
 LE POIDS  $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$   
 FORCES DE LIANONS  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  VERTICALES  
 TENSION DU FIL  $\vec{T} = T\vec{e}_x$   
 FORCE DE LAPLACE  $\vec{F} = iBh\vec{e}_z$

**SYSTEME** : MASSE M  
**FORCES APPLIQUEES** :  
 POIDS  $\vec{P}_n = Mg\vec{e}_z$   
 LIANON  $\vec{T}_n = -T\vec{e}_z$

ASPECT MECANIQUE

**PD** AVEC  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  VITESSE DE LA BARRÉ

**PD**  $M\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \vec{P}_n + \vec{T}_n$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2}_{\text{VERTICALES}} + \vec{F} + \vec{T}$$

PROJECTION SUR  $\vec{e}_z =$

$$M \ddot{z} = Mg - T$$

EN PROJECTION SUR  $Oz$  :

$$m \frac{dv}{dt} = iBh + T$$

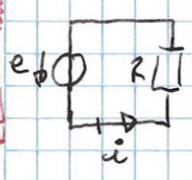
FIL INEXTENSIBLE  $\dot{z} = v$

$$T = M(g - \ddot{z}) = M(g - \frac{dv}{dt})$$

**BILAN MECANIQUE**

$$(M+m) \frac{dv}{dt} = iBh + Mg$$

ASPECT ELECTRIQUE



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S B \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, dS = BS = Bhx$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bh v = \frac{L}{2} Ri$$

**DECOUPLAGE** : ON ELIMINE  $i$  DANS LE BILAN MECANIQUE  
 PETIT TRAITEMENT. ON SORT :

$$\left[ \frac{(M+m)R}{B^2 h^2} \right] \frac{dv}{dt} + v = \frac{R \pi g}{B^2 h^2} \quad N_{\infty}$$

**SOLUTION**  $v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + N_{\infty} \quad \text{CF} \quad N_{\infty} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

## **LorentzE.Le haut parleur. Extrait ccp psi 2005.**

1) Quand le haut-parleur est alimenté, la bobine est parcourue par un courant  $i(t)$ , ce qui crée alors une force de Laplace horizontale sur la bobine et elle se met en mouvement. Elle entraîne la membrane du haut-parleur qui par frottement avec l'air crée l'onde acoustique.

2) Un petit élément de courant  $id\vec{l}\vec{u}_\theta$  dans le champ  $B\vec{u}_r$  crée la force élémentaire de Laplace  $d\vec{F}_L = id\vec{l}\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = -Bid\vec{l}\vec{u}_z$ . On intègre alors sur toute la bobine ce qui donne  $\vec{F}_L = -Bi\ell\vec{u}_z$ .

3) On s'aperçoit qu'en tout point de la bobine, le champ magnétique est orthogonal à l'élément de courant et que tous les éléments de courants avancent à la même vitesse. Si on déroule la bobine, on obtient des rails de Laplace avec une tige mobile de longueur  $\ell$ . On retrouve alors le résultat de cours.

4) Equation électrique. La tension  $v_s$  alimente le circuit RL auquel il faut ajouter la fem d'induction  $e$ , le tout en série. La LDM donne :  $v_s(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - e = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - Bl\frac{dz}{dt}$

5) Equation mécanique: le PFD donne  $m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{F}_f + \vec{F}_L$ .  
La projection sur Oz donne :  $m\ddot{z} = -kz - \lambda\dot{z} - Bi\ell$

6a) On revient en mode temporel quelconque. Pour faire un bilan de puissance, on peut multiplier l'équation mécanique par la vitesse  $v$ , et multiplier l'équation électrique par le courant  $i(t)$ . Et si on les ajoutait ?

On trouve :

$$v_s(t).i(t) = Ri^2 + \lambda v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right)$$

Il faut maintenant comprendre ce qu'on vient d'écrire

$v_s(t).i(t)$  est la puissance électrique fournie au haut-parleur. La suite nous explique ce que l'énergie  $v_s(t).i(t) dt$  peut devenir.

On prend les termes dans l'ordre :

elle peut être perdue par effet Joule;

elle peut être perdue par frottement contre l'air

elle peut être récupérée dans la bobine sous forme d'énergie magnétique,

elle peut être récupérée par le système mécanique sous forme d'énergie cinétique,

elle peut être récupérée par le système mécanique sous forme d'énergie potentielle de ressort.

6b) On suppose un régime périodique de période  $T$ . Calculons les puissances moyennes sur une période soit :  $\langle \text{équation} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \text{équation}. dt$

Les trois derniers termes sont nuls (à vérifier...) et on obtient :  $\langle v_s(t).i(t) \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \lambda v^2 \rangle$

Le premier terme est la puissance moyenne perdue par effet Joule. Le second terme est la puissance mécanique perdue par frottement avec l'air, or c'est justement ce qui nous intéresse car nous voulons créer une onde sonore donc fournir de l'énergie à l'air ambiant.

Ce qui nous intéresse est :  $\langle P_S \rangle = \langle \lambda v^2 \rangle$ . Pour l'obtenir, nous devons dépenser :  $\langle P_S \rangle = \langle \lambda v^2 \rangle$  et  $\langle P_J \rangle = \langle Ri^2 \rangle$ . Le rendement est :  $\frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance totale}} = \frac{\langle P_S \rangle}{\langle P_S \rangle + \langle P_J \rangle}$ .

7) En régime sinusoïdal permanent de pulsation  $\omega$ , on adopte la notation complexe. Une dérivation temporelle revient à multiplier par  $j\omega$  et on peut facilement découpler les équations, ici éliminer  $z$ .

On sort :  $Z_{em} = \frac{j\omega B^2 \ell^2}{k - m\omega^2 + j\omega\lambda}$ .

Ce qui donne :  $\underline{Y}_{em} = \frac{\lambda}{B^2 \ell^2} + j\omega \left( \frac{m}{B^2 \ell^2} \right) + \frac{1}{j\omega} \left( \frac{k}{B^2 \ell^2} \right)$

qui s'interprète comme l'association parallèle d'une résistance  $R_m = \frac{B^2 \ell^2}{\lambda}$ , d'un condensateur  $C_m = \frac{m}{B^2 \ell^2}$  et d'une bobine  $L_m = \frac{B^2 \ell^2}{k}$ . Le montage électrique équivalent du haut-parleur est donc :

