

I Séries entières

1. Convergence d'une série entière

- a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement
- b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leq R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1} \frac{z^n}{n}$.

2. Somme d'une série entière

- a) Continuité de la somme : convergence normale sur tout segment de $] -R, R[$ dans le cas réel, continuité de la somme sur $] -R, R[$. Continuité sur le disque ouvert de rayon R dans le cas complexe (*admis*).
- b) Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle : intégration terme à terme de la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence, classe C^∞ de la somme sur le disque ouvert de convergence.

3. Fonction développable en série entière

- a) Série de Taylor : définition d'une fonction DSE (au voisinage de 0), série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur $] -r, r[$. Une fonction est DSE sur $] -r, r[$ si et seulement si elle est de classe C^∞ sur $] -r, r[$ et pour tout $x \in] -r, r[$, le reste $R_n(x)$ de Taylor tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- b) Fonctions usuelles : DSE en 0 de e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (*Taylor*), $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ (*intégration*) et $(1+x)^\alpha$ (*en utilisant une équation différentielle*).

II Variables aléatoires discrètes

1. Définition d'une variable aléatoire discrète et utilisation des notations ($X = x$),... Composition par une application, loi d'une variable aléatoire discrète .
2. Couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe et lois marginales, loi conditionnelle de X sachant ($Y = y$), variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (généralisation à n variables aléatoires discrètes indépendantes), lemme des coalitions.
3. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (nombre de succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes), géométrique (temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes) et de Poisson. Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
4. Espérance (existence si $\sum x_n P(X = x_n)$ est sommable), théorème de comparaison (si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors $E(X)$ est finie), espérance des lois usuelles, $E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert.

À suivre : la fin des variables aléatoires discrètes