

Applications dans des espaces vectoriels normés

La notation \mathbb{K} désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

Rappels :

- ◇ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E , un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $\ell \in E$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme $\| \cdot \|$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$$

- ◇ Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La nature et la limite éventuelle d'une suite de vecteurs de E ne dépend pas de la norme.

Si (e_1, \dots, e_p) est une base de E , $u_n = \sum_{i=1}^p \alpha_i(n)e_i$ et $\ell = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ si et seulement si } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_i(n) = \lambda_i$$

I Topologie des espaces vectoriels normés

1. Boules et sphères

Définition : Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On définit la **boule ouverte** de centre a et de rayon $r > 0$ par

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

la **boule fermée** de centre a et de rayon $r \geq 0$ par

$$B_f(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

le **sphère** de centre a et de rayon $r \geq 0$ par

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

$B(0, 1)$ et $B_f(0, 1)$ sont les boules unités ouverte et fermée, $S(0, 1)$ la sphère unité.

Exemple(s) :

- (I.1) Dans \mathbb{R} les boules fermées sont les segments.
- (I.2) Dans \mathbb{R}^2 , représenter les boules unités pour les normes usuelles.
- (I.3) Toutes les boules sont bornées.

Remarque(s) :

- (I.4) Une partie A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $A \subset B_f(0, M)$.

Définition : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et C une partie de E . On dit que C est une partie **convexe** si

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1] tx + (1 - t)y \in C$$

Remarque(s) :

- (I.5) Cela signifie que C est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de vecteurs de C , le segment $[x, y]$ est inclus dans C .

Exemple(s) :

- (I.6) Les parties convexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles de \mathbb{R} .
- (I.7) Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe (ie $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$) si et seulement si $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, f(x) \leq y\}$ (l'épigraphe de f) est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Propriété [I.1] : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toutes les boules de E sont des parties convexes de E .

2. Parties fermées et ouvertes

Définition : Soit F une partie d'un espace vectoriel normé E . On dit que F est une **partie fermée** (ou un fermé) de E si

pour toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge dans E on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in F$.

Attention : Cela ne veut pas dire que toute suite d'une partie fermée F converge mais que si elle converge alors sa limite est aussi dans F .

Exemple(s) :

- (I.8) Les intervalles fermés de \mathbb{R} ($[a, b]$, $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) sont des fermés de \mathbb{R} .
- (I.9) \emptyset et E sont des fermés de E .
- (I.10) Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété [I.2] : Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule fermée de E et toute sphère de E sont des parties fermées de E .

Propriété [I.3] : Soit E un espace vectoriel normé.

1. Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E .
2. Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E .

Attention : Une réunion quelconque de parties fermées peut ne pas être fermée :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] =] -1, 1[\text{ n'est pas un fermé de } \mathbb{R}.$$

Exemple(s) :

- (I.11) Toute partie finie de E est une partie fermée.

Définition : Soient E un espace vectoriel normé et U une partie de E . On dit que U est une **partie ouverte** (ou un ouvert) de E si son complémentaire (dans E) est une partie fermée de E .

Exemple(s) :

(I.12) Les intervalles ouverts de \mathbb{R} ($]a, b[$, $] -\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$) sont des parties ouvertes de \mathbb{R} .

(I.13) \emptyset et E sont des ouverts de E .

Attention : Il existe des parties ouvertes et fermées et des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. Le contraire de A est ouverte n'est donc pas A est fermée !

Propriété [I.4] : Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule ouverte de E est une partie ouverte de E .

Propriété [I.5] : Soit E un espace vectoriel normé.

1. Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E .
2. Toute intersection finie de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E .

Attention : Une intersection quelconque de parties ouvertes peut ne pas être ouverte : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$
n'est pas un ouvert de \mathbb{R} .

Propriété [I.6] : Soient E un espace vectoriel normé et U une partie de E . On a équivalence de :

- i) U est une partie ouverte de E .
- ii) $\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U$

Propriété [I.7] : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E . Alors les parties ouvertes (resp. fermées) de E pour la norme N_1 sont exactement les parties ouvertes (resp. fermées) pour la norme N_2 .

Conséquence [I.8] : Si E est un espace de dimension finie et $A \subset E$, alors la nature topologique de A (ouverte ou fermée) ne dépend pas de la norme sur E choisie.

3. Adhérence et intérieur

Définition : Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x_0 \in E$.

1. On dit que x_0 est **adhérent** à A si

$$\forall \varepsilon > 0, B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

On note \bar{A} l'ensemble des points adhérents à A appelé **adhérence de A**

2. On dit que x_0 est **intérieur** à A si

$$\exists r > 0, B(x_0, r) \subset A$$

On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A , appelé **intérieur de A**

3. On dit que A est **dense** dans E si $\bar{A} = E$.

Remarque(s) :

(I.14) On a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$ (inclusions strictes en général)

(I.15) La frontière de A , notée $\text{Fr}(A)$, est l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A mais que ne sont pas intérieurs à A : $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

(I.16) $\overset{\circ}{A}$ est une partie ouverte ; \bar{A} et $\text{Fr}(A)$ sont des parties fermées.

Exemple(s) :

- (I.17) Si A est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée, alors $\sup A$ est adhérent à A .
- (I.18) U est une partie ouverte si et seulement si $U = \overset{\circ}{U}$.
- (I.19) \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .
- (I.20) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles, ie $\overline{\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ donc $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Propriété [I.9] : (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et $\ell \in E$. On a équivalence de :

- i) ℓ est adhérent à A .
- ii) Il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de vecteurs de A telle que $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Remarque(s) :

- (I.21) La propriété précédente signifie que F est fermée si et seulement si tout point adhérent à F appartient à F ie F est fermée si et seulement si $\overline{F} = F$.

Exemple(s) :

- (I.22) Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors tout sous-espace F de E est fermé. Si de plus $F \neq E$ alors $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

II Applications continues

1. Limite et continuité ponctuelle

Définition : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie de E , $f : A \rightarrow F$, a un point de E adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f **tend vers le vecteur ℓ en a** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

Remarque(s) :

- (II.1) L'existence de la limite de f , et son éventuelle valeur, dépendent des normes utilisées sur E et F : si $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$ alors $\lim_0 \varphi = 0$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ sur E mais f n'a pas de limite en 0 pour $\|\cdot\|_1$.
- (II.2) La notion de point a adhérent à A dépend aussi de la norme sur E .

Propriété [II.1] : (Unicité de la limite)

Si f admet une limite en a alors elle est unique. On note alors cette limite $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Attention : Encore une fois, la limite d'une fonction en a dépend des normes sur E et F donc l'unicité de la limite signifie que le vecteur ℓ est unique (s'il existe) pour un couple de normes fixé.

Propriété [II.2] : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E , $f : A \rightarrow F$ et $a \in E$.

1. Si (N_E, N'_E) et (N_F, N'_F) sont deux couples de normes équivalentes sur E et F respectivement alors on a $\lim_a f = \ell$ pour les normes N_E, N_F si et seulement si $\lim_a f = \ell$ pour les normes N'_E, N'_F .
2. Si E et F sont de dimensions finies alors la limite de f en a (et son existence) ne dépendent pas des normes sur E et F utilisées.

Propriété [II.3] : (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $f : A \rightarrow F$, a adhérent à A et $\ell \in F$. On a équivalence de :

- i) f tend vers ℓ en a , ie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
- ii) Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$.

Attention :

- Pour montrer que f admet une limite en a , il ne faut donc pas choisir une suite tendant vers a mais considérer une suite quelconque tendant vers a . Si $f(x) = \sin(\pi x)$ et $a_n = n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0$ alors que f n'a pas de limite en $+\infty$.
- Si par contre on sait que la limite de f en a existe (mais qu'on ne la connaît pas), on peut la déterminer en utilisant une suite tendant vers a (que l'on peut donc choisir cette fois). Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(a + \frac{1}{n}h\right) = l$ pour $h \in E$ par exemple.

Remarque(s) :

- (II.3) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : E \rightarrow E$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Propriété [II.4] : Soient $f : A \rightarrow F$, a adhérent à A , $\ell \in F$ et $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varphi(x)$ au voisinage de a .

$$\text{Si } \lim_a \varphi = 0 \text{ alors } \lim_a f = \ell.$$

Exemple(s) :

(II.4) $f : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + |y|}$ tend vers 0 en $(0, 0)$.

Définition [II.5] : Soient $f : A \rightarrow F$, où A est une partie de E et a un point adhérent à A . On suppose que f admet une limite en a .

1. Si f est définie en a (ie $a \in A$), alors $\lim_a f = f(a)$. On dit que f est **continu en a** .
2. Si f n'est pas définie en a (ie $a \notin A$), on dit que f est **prolongeable par continuité en a** . La fonction \tilde{f} définie sur $A \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_a f & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a .

Exemple(s) :

(II.5) $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

(II.6) $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est continue en tout point $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition : (Limites infinies)

1. Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E , et a un point de E adhérent à A .
 - $\lim_a f = +\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow f(x) > K$.
 - $\lim_a f = -\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow f(x) < K$.
2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , F un espace vectoriel normé, $f : I \rightarrow F$ et $\ell \in F$.
 - Si I n'est pas majoré, $\lim_{+\infty} f = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > K \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$.
 - Si I n'est pas minoré, $\lim_{-\infty} f = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < K \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$.

Remarque(s) :

- (II.7) Dans la suite, si I est un intervalle non majoré (resp. non minoré), on dira que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à I .
- (II.8) La caractérisation séquentielle de la limite est également valable si $a = \pm\infty$ (donc avec A un intervalle de \mathbb{R} non borné) ou avec $\ell = \pm\infty$ (donc avec $F = \mathbb{R}$).

Exemple(s) :

- (II.9) Étudier $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{|x|^{3/2}y}{x^4 + y^2}$ en $(0, 0)$.
- (II.10) $f : (x, y) \mapsto \frac{(x + y)(x - y - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2(x - y - 1)}}$ se prolonge-t-elle par continuité en $(1, -1)$?

Propriété [II.6] : Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E , F un espace vectoriel normé de dimension finie p , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , $f : A \rightarrow F$ et, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les applications $f_i : A \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $\forall x \in A, f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x)e_i$. Si $\ell \in F$, on pose $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$. Alors on a

$$\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_a f_i = \ell_i$$

Remarque(s) :

- (II.11) L'étude de $f : A \rightarrow F$, où $\dim F = p$, est équivalente à l'étude de p application de A dans \mathbb{K} .

Attention : L'étude de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas équivalente à l'étude des applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$; c/ex : $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

2. Propriétés des limites

Propriété [II.7] : Si $f : A \rightarrow F$ admet une limite en a adhérent à A alors f est bornée au voisinage de a , ie

$$\exists r > 0, \exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|x - a\|_E < r \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq K.$$

Propriété [II.8] : Soient $f : A \rightarrow F$, a adhérent à A et $\ell \in F$.

1. Si $\lim_a f = \ell$ alors $\lim_a \|f\|_F = \|\ell\|_F$.
2. Si f est continue en a alors $\|f\|_F$ est continue en a .

Propriété [II.9] : (Linéarité de la limite)

Soient f et g définies de A dans F et a adhérent à A .

1. Si f et g admettent des limites (finies) en a alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet une limite en a et

$$\lim_a (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_a f + \beta \lim_a g$$

2. Si f et g sont continues en a alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ est continue en a .

Propriété [II.10] : (Composition des limites)

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F , $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$.

1. On suppose que a est adhérent à A , que $b = \lim_a f$ existe (finie ou non), que b est adhérent à B et $\lim_b g$ existe (finie ou non). Alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_a (g \circ f) = \lim_b g$.

2. Si f est continue en a et si g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

Propriété [II.11] : (Produit par une fonction scalaire)

Soient $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$, $f : A \rightarrow F$ et a adhérent à A .

1. Si λ et f admettent des limites (finies) en a alors λf admet une limite en a et $\lim_a(\lambda f) = \lim_a \lambda \times \lim_a f$.
2. Si λ et f sont continues en a alors λf est continue en a .

Propriété [II.12] : (Cas des fonctions à valeurs scalaires)

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ et a adhérent à A .

1. Si f admet une limite (finie) non nulle en a alors f ne s'annule pas au voisinage de a , $\frac{1}{f}$ admet une limite en a et $\lim_a \frac{1}{f} = \left(\lim_a f\right)^{-1}$.
2. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .

3. Applications continues

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. On dit que f est **continue sur** A si f est continue en tout point de A .

On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs dans F .

Définition : Soient $f : A \rightarrow F$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé E , et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est **k -lipschitzienne** si

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

Remarque(s) :

(II.12) La notion d'application lipschitzienne ne dépend pas des normes équivalentes sur E et F utilisées mais la valeur de la constante k dépend des normes (même si on les remplace par des normes équivalentes).

Exemple(s) :

(II.13) L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

(II.14) Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$. L'application $d : x \in E \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Propriété [II.13] :

1. Si f et g sont lipschitziennes sur A alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, l'application $(\alpha f + \beta g)$ est lipschitzienne sur A .
2. Si f est lipschitzienne sur A , si g est lipschitzienne sur B et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f$ est lipschitzienne sur A .

Attention : Le produit de deux applications lipschitziennes n'est pas toujours une application lipschitzienne ; $c/ex : id_{\mathbb{R}}$ est 1-lipschitzienne mais $id_{\mathbb{R}}^2$ ne l'est pas.

Propriété [II.14] : Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A .

Attention : La réciproque est fautive ; $c/ex : id_{\mathbb{R}}^2$.

Propriété [II.15] : (Opérations sur les fonctions continues à valeurs vectorielles)

1. Si $(f, g) \in \mathcal{C}(A, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}(A, F)$.
Ainsi $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, si $g \in \mathcal{C}(B, G)$ et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}(A, G)$.
3. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et $B \subset A$ alors $f|_B \in \mathcal{C}(B, F)$.
4. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ alors $\|f\| \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Exemple(s) :

(II.15) Montrer que f définie par $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -x^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Propriété [II.16] : Soient A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Si $f : A \rightarrow F$, on note f_1, \dots, f_p les applications coordonnées de A dans \mathbb{K} définies par $\forall x \in A, f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_p(x)e_p$.

f est continue sur A si et seulement si f_1, \dots, f_p sont continues sur A

Propriété [II.17] :

1. Si $\lambda \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(A, F)$ alors $\lambda f \in \mathcal{C}(A, F)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est telle que $\forall x \in A, f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(A, F)$.

Théorème [II.18] : (Théorème des bornes atteintes)

Soient E un espace vectoriel de **dimension finie**, K une partie non vide, fermée et bornée de E et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (donc à valeurs dans \mathbb{R}).

Si f est continue sur K alors f est bornée sur K et atteint ses bornes
ie $\max_K f$ et $\min_K f$ existent.

Remarque(s) :

(II.16) Si E est de dimension finie et $f : K \rightarrow F$ est continue sur $K \subset E$, fermé borné et non vide, alors f est bornée sur K mais $\max_K f$ et $\min_K f$ n'existent pas ; par contre $\max_K \|f\|_F$ et $\min_K \|f\|_F$ existent.

(II.17) Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est dite *compacte*.

Exemple(s) :

(II.18) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : B_f(a, r) \rightarrow B_f(a, r)$ est telle que $\forall (x, y) \in B_f(a, r)^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ alors f admet un unique point fixe dans $B_f(a, r)$.

(II.19) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, A une partie fermée non vide de E . Pour tout x de E , il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

(II.20) Continuité des intégrales à paramètre dans le cas où l'intervalle d'intégration est un segment :
Si f est continue sur $I \times [a, b]$ ($J = [a, b]$ est un segment) alors $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est \mathcal{C}^0 sur I .

Propriété [II.19] : (Caractérisation de la continuité des applications linéaires)

Soit f une application linéaire de E vers F . Alors

f est continue sur E si et seulement si $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$

Remarque(s) :

(II.21) La continuité d'une application linéaire dépend des normes sur E et F : la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(0)$ est \mathcal{C}^0 sur $\mathbb{R}[X]$ pour $N_\infty : P = \sum_{i=1}^d a_i X^i \mapsto \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|$ mais pas pour $\|\cdot\|_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$.

Théorème [II.20] : (Continuité des applications linéaires en dimension finie)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

Exemple(s) :

(II.22) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est continue. On en déduit que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = L$ existe alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} AM_k = AL$.

Si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue. On en déduit que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = L$ existe alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{-1}M_kP = P^{-1}LP$.

(II.23) De même, si (u_k) est une suite d'endomorphismes de \mathbb{R}^n qui converge vers v et si $x \in \mathbb{R}^n$ est fixé alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = v(x)$.

(II.24) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $N(f)$ par $N(f) = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. L'application N est alors une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$, ie telle que :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, N(f \circ g) \leq N(f)N(g).$$

De plus il existe un vecteur $x_0 \in E$, de norme 1, tel que $\|f(x_0)\| = N(f)$.

(II.25) De même, si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{K}^n (que l'on identifie à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), alors $N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$ définit une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Conséquence [II.21] : Soit P une application polynômiale sur \mathbb{K}^n , ie de la forme

$$P : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=0}^N a_k x_1^{\alpha_{k,1}} x_2^{\alpha_{k,2}} \dots x_n^{\alpha_{k,n}}$$

où $N \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{K}^{N+1}$ et les $\alpha_{i,j}$ sont des entiers naturels.

Alors P est continue sur \mathbb{K}^n .

Théorème [II.22] : Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors,

si $f : (\mathbb{K}^n)^p \rightarrow E$ est p -linéaire alors f est continue sur $(\mathbb{K}^n)^p$.

Conséquence [II.23] : L'application $\det : M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exemple(s) :

(II.26) Les applications $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mapsto XY$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto X^2$ sont continues.

(II.27) Si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M et si la suite $(A_p^{-1})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers N alors M est inversible et $M^{-1} = N$.

(II.28) Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ alors $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

Propriété [II.24] : Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ continue. Si A est une partie de F , on note $f^{-1}(A)$ l'image réciproque de A par f

$$f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$$

1. Si A est une partie fermée de F alors $f^{-1}(A)$ est une partie fermée de E .
2. Si A est une partie ouverte de F alors $f^{-1}(A)$ est une partie ouverte de E .

Attention :

1. La notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que f est bijective (donc l'application f^{-1} n'existe pas forcément).
2. Cette propriété est fautive pour les images directes de $A \subset E$ par f : on peut avoir A fermée (resp. ouverte) et $f(A)$ non fermée (resp. non ouverte).

Conséquence [II.25] : Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur E .

1. L'ensemble $\{x \in E, f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de E .
2. Les ensembles $\{x \in E, f(x) = 0\}$ et $\{x \in E, f(x) \geq 0\}$ sont des parties fermées de E .

Exemple(s) :

(II.29) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit en particulier qu'il existe $r > 0$ tel que si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\|H\| < r$ alors $I_n + H$ est inversible.

(II.30) Montrer que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 3xy < y^3 \text{ et } xy > 1\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

(II.31) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_{k+1} = 2M_k - M_k A M_k$.

- a) Trouver une relation entre $I_n - A M_{k+1}$ et $I_n - A M_k$.
- b) Montrer que la norme $\|M\| = (\text{Tr}(M^T M))^{1/2}$ vérifie $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|MN\| \leq \|M\| \times \|N\|$ et en déduire que si M_0 est tel que $\|I_n - A M_0\| < 1$ alors la suite $(A M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.
- c) En utilisant le fait que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, montrer que A est inversible et que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} .