Correction du DM13

(d'après CCP PC 2012 Maths 2)

Partie I :

1. a) La suite $\left(\dfrac{\rho^n}{n^\alpha}\right)$ est bornée si et seulement si $\begin{cases}\rho \leqslant 1 & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \rho < 1 & \text{si } \alpha < 0\end{cases}$ donc $\boxed{R = 1}$

b) Cours !

c) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-x)^n}{n^\alpha} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{x^n}{n^\alpha} = 2\sum_{p=1}^{N} \frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha} = 2^{1-\alpha}\sum_{p=1}^{N} \frac{(x^2)^p}{p^\alpha}$ donc, si $|x| < 1$, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\boxed{L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha\left(x^2\right)}$

2. a) On a, pour $x \in]-1,1[$, $L'_{\alpha+1}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$ donc $\boxed{L_\alpha(x) = xL'_{\alpha+1}(x) \text{ pour } |x| < 1}$

b) On a $L_0(x) = x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\boxed{L_0(x) = \dfrac{x}{1-x} \text{ pour } |x| < 1}$

On a ensuite, $L_{-1}(x) = xL'_0(x)$ donc $\boxed{L_{-1}(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} \text{ pour } |x| < 1}$ et enfin, $L'_1(x) = \dfrac{L_0(x)}{x} = \dfrac{1}{1-x}$ pour $0 < |x| < 1$ donc, comme $L_1(0) = 0$, on a $\boxed{L_1(x) = -\ln(1-x) \text{ pour } |x| < 1}$

3. Pour $n \geqslant 1$, $x \geqslant 0$ et $\alpha \leqslant 1$, on a $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{x^n}{n}$ donc, si $x \in [0,1[$, on a $L_\alpha(x) \geqslant L_1(x) = -\ln(1-x)$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} L_\alpha(x) = +\infty \text{ si } \alpha \leqslant 1}$

Partie II

1. a) Avec $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$, on a

H1 : pour tout $n \geqslant 1$, la fontion f_n est continue sur $[-1,1]$.

H2 : $\|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente si $\alpha > 1$ donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

On en déduit que $\boxed{L_\alpha \text{ est continue sur } [-1,1] \text{ si } \alpha > 1}$

b) Pour $x \in]0,1[$, on a $L'_2(x) = \dfrac{L_1(x)}{x} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$ donc L_2 est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} L'_2(x) = +\infty$; on en déduit que $\boxed{L_2 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$

2. a) La fonction φ_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x = 1$ et sur $\mathbb{R}^+$ si $x < 1$. Pour $x = 1$, $\varphi_1(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ et $2-\alpha < 1$ donc φ_1 est intégrable sur $]0,1]$. Pour $x \leqslant 1$, $\varphi_x(u) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ donc φ_x est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit que $\boxed{K_\alpha(x) \text{ est défini pour } x \leqslant 1}$

b) La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ (car $\alpha > 1$), de plus $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha > 0$. Enfin, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue, positive, non nulle et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{G_\alpha > 0}$ *C'est en fait la fonction* Γ *!*

3. a) On a, pour $x \in [-1,1]$ et $u > 0$, $\dfrac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x} = xu^{\alpha-1}\dfrac{e^{-u}}{1-xe^{-u}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u^{\alpha-1}x^k e^{-ku}$ car $|xe^{-u}| < 1$ si $u > 0$ et $|x| < 1.$; on pose alors $g_k(u) = u^{\alpha-1}x^k e^{-ku}$ et on applique le TITT (avec $x \in [-1,1]$ fixé) :

H1 : On vient de voir que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $S : u \mapsto \dfrac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x}$.

H2 : Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction g_n et la fonction S sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.

H3 : Les fonctions g_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\displaystyle\lim_{u\to 0} g_n(u) = 0$ ($\alpha > 1$) et $g_n(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

H4 : Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(u)|\,\mathrm{d}u = |x|^n \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-nu}\,\mathrm{d}u$; on pose $\theta = nu$ ($\theta \mapsto \dfrac{\theta}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$) et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(u)|\,\mathrm{d}u = \frac{|x|^n}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} \theta^{\alpha-1}e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{|x|^n}{n^\alpha}G_\alpha$. Comme $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

On en déduit que $xK_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)\,du$ et comme $\int_0^{+\infty} g_n(u)\,du = \frac{x^n}{n^\alpha} G_\alpha$ par le même changement de variable, on a bien $\boxed{xK_\alpha(x) = G_\alpha \times L_\alpha(x) \text{ pour } \alpha > 1 \text{ et } x \in [-1,1]}$

b) On sait déjà que L_α est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ donc il suffit de prouver que K_α est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ car $G_\alpha > 0$: on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On note $k : (x,u) \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ et on a
H1 : Pour $u > 0$, la fonction $x \mapsto k(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.
H2 : Pour $x \in]-\infty,1[$, la fonction $u \mapsto k(x,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
H3 : Pour $x \in]-\infty,1[$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
H4 : Soit $[a,b] \subset]-\infty,1[$; pour $u > 0$ et $x \in [a,b]$, on a $\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,u)\right| = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2} = \varphi(u)$ car $e^u - x \geqslant e^u - b \geqslant 0$; la fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ (car $b < 1$), de plus, $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $K_\alpha \in \mathcal{C}^1(]-1,1[)$ et $K'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}\,\mathrm{d}u$ si $|x| < 1$ et $\alpha > 1$ puis, avec $L_\alpha = \frac{xK_\alpha(x)}{G_\alpha}$, on a $\boxed{L'_\alpha(x) = \frac{1}{G_\alpha}\left[\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,\mathrm{d}u + x\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}\,\mathrm{d}u\right] \text{ si } x < 1}$ *par contre la dérivée de L_α n'est égale à la somme de la série entière $\sum \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}}$ que pour $x \in]-1,1[$ car cette série est DVG pour $x < -1$.*

c) Il s'agit de prouver que l'intégrale définissant K_α reste convergente si $z \in \mathbb{C}\backslash]1,+\infty[$, ce qui est le cas car $|e^u - z|^2 = (e^u - \mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 > 0$ donc $u \mapsto k(u,z)$ reste continue sur $\mathbb{R}^+$ et $k(u,z) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$.

d) On commence par remarquer que si $z^2 \notin]1,+\infty[$ alors $z \notin]1,+\infty[$ et $-z \notin]1,+\infty[$ donc $L_\alpha(z)$ et $L_\alpha(-z)$ existent. On a alors $L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = \frac{z}{G_\alpha}(K_\alpha(z) - K_\alpha(-z))$. Puis $K_\alpha(z) - K_\alpha(-z) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z} - \frac{u^{\alpha-1}}{e^u + z}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{2zu^{\alpha-1}}{e^{2u} - z^2}\,\mathrm{d}u$. On pose alors $t = 2u : t \mapsto \frac{t}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a $K_\alpha(z) - K_\alpha(-z) = 2z\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}2^{1-\alpha}}{e^t - z^2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = 2^{1-\alpha}zK_\alpha(z^2)$. Ce qui donne bien $\boxed{L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha}L_\alpha(z^2)}$

Partie III

1. L_2 est continue sur $[-1,1]$ donc l'égalité de **I.1.c** est valable sur $[-1,1]$; on en déduit $\boxed{L_2(-1) = -\frac{1}{2}L_2(1) = -\frac{\pi^2}{12}}$

2. a) La fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ car $1 - x \in]0,1[$ si $x \in]0,1[$.

b) Pour $x \in]0,1[$, on a $\phi'(x) = \frac{L_1(x)}{x} - \frac{L_1(1-x)}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \ln(x)\frac{1}{1-x} = 0$ car $L_1(x) = -\ln(1-x)$.

L_2 est continue sur $[0,1]$ et $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to0}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc $\phi = \lim_{x\to0}\phi(x) = L_2(0) + L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit $L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\right]$ donc $\boxed{L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$

3. Cette fois, on étudie $\Phi : x \mapsto L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$: Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ car si $x \in \left]-1,\frac{1}{2}\right[$ alors $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \in \left]-1,\frac{1}{2}\right[\subset]-1,1[$ et $1 - x > 0$. De plus, si $x \neq 0$, on a $\Phi'(x) = \frac{L_1(x)}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}L_1\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{1-x}\ln(1-x)$ donc $\Phi'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{1}{x(x-1)}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{1-x}\ln(1-x) = 0$. Comme Φ' est continue sur $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$, on a $\Phi' = 0$ sur $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$. Puis comme Φ est continue sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, elle est constante sur cet intervalle ; de plus, $\Phi(0) = 0$, donc $\boxed{L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2 \text{ pour } x \in \left[-1,\frac{1}{2}\right]}$