

Partie I : Suites et intégrales

On admet que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, |s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$$

2. Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$$

- a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 b) Montrer que $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$.
 c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n}{u\sqrt{u}} du$$

- d) Montrer que

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1], \left| 1 - (\cos(\sqrt{2u/n}))^n \right| \leq u$$

- e) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

- f) On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

Partie II : Autour du pile ou face

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans $\{1, -1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

1. Étude de $E(|S_n|)$

- a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
 b) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que T et $-T$ ont même loi.
 Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.
 c) On considère la fonction φ_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t .
 Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t .
 d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.
 On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue au début de la partie I.

2. Étude de $\frac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que $P(\mathcal{Z}) = 0$ et

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_n = \left\{ \omega \in \Omega, \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

- Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (on pourra raisonner par récurrence sur n)
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.
- Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.
- En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.