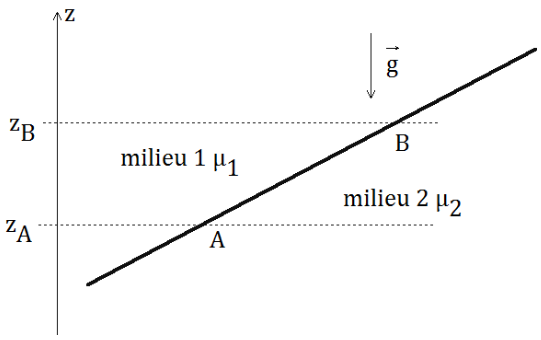
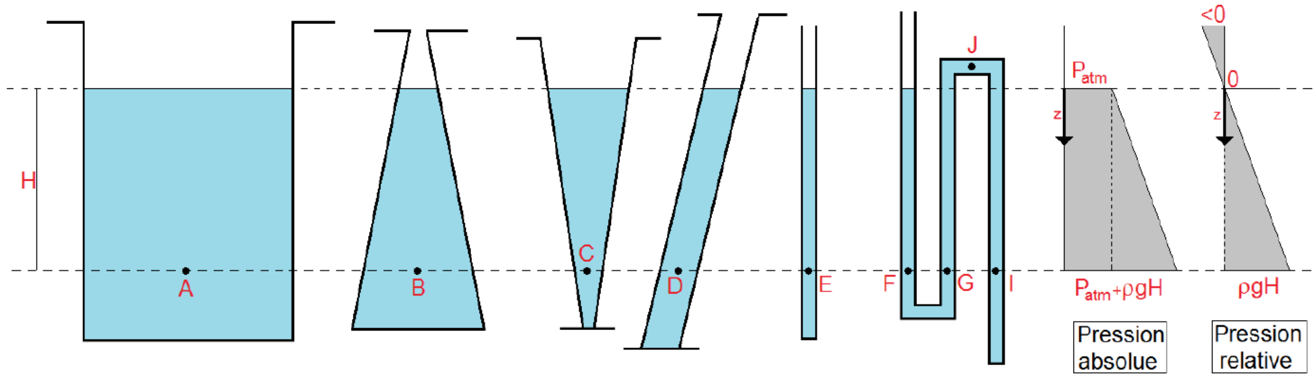
PSI2. Statique des fluides. Proposition de solution.

A)



On a un système à deux états (surface horizontale ou non) comme pour une diode. Le mieux est de prendre le cas faux.
Considérons le dessin ci-dessus où la surface de contact est supposée non horizontale. On suppose les points A et B suffisamment proches pour considérer les deux masses volumiques μ_1 et μ_2 uniformes.
Dans le milieu 1, la loi de l'hydrostatique donne $P_A-P_B=\mu_1 g(z_B-z_A)$.
Dans le milieu 2, la loi de l'hydrostatique donne $P_A-P_B=\mu_2 g(z_B-z_A)$.
Si μ_1 est différent de μ_2, alors l'égalité des deux expressions donne alors $z_B=z_A$ et la surface de contact est donc horizontale.

Considérons plusieurs formes de récipients :



On déduit de la loi de Pascal que les pressions relatives aux points A, B, C, D, E, F, G, et I sont égales quelle que soit la forme du récipient, et valent $\rho g H$.

On constate également que la pression relative au point J est négative, puisque ce point est situé au dessus de la surface libre.

B)Pour un fluide incompressible, l'intégration de la loi de l'hydrostatique sur une hauteur h permet de calculer la variation de pression ΔP sur cette hauteur soit donc : $\Delta P=\mu g h$.

Pour l'eau, une variation de pression de 1 bar donne donc une hauteur h=10m et un baromètre à eau aurait donc une hauteur de 10m (la partie basse du baromètre au contact de l'air à la pression atmosphérique et la partie haute fermée à la pression nulle ou plutôt la pression de vapeur saturante de l'eau).

En remplaçant l'eau par le mercure, on divise la hauteur par 13,6. Ainsi donc, 1 atm=1,013bar correspond à une hauteur de 760mm de mercure. Historiquement, les mesures de pression étaient faites avec des baromètres à mercure, et on avait pris le mm de mercure comme équivalent mesure de pression. Maintenant, on utilise des capteurs dont une caractéristique électrique dépend de la pression.

C) μ_o : masse volumique de l'eau de mer g : accélération de la pesanteur.

1)Sous forme différentielle à T=cte, on a : $\frac{d\mu}{\mu} = \chi_T dP$ intégrable entre les points 0 et 1. On obtient :

$$Ln\left(\frac{\mu_1}{\mu_o}\right) = \chi_T(P_1 - P_o)$$

2)Si on ajoute maintenant dP=μgdz, on obtient : $\frac{d\mu}{\mu^2} = \chi_T g dz$ qui s'intègre en :

$$\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_o} = -\chi_T g(z_1 - z_o)$$

3)La première équation donne : $P_1 - P_o = \frac{1}{\chi_T} Ln\left(\frac{\mu_1}{\mu_o}\right) = -\frac{1}{\chi_T} Ln\left(\frac{\mu_o}{\mu_1}\right)$

Rem : essayez de ne pas inverser le Ln et vous comprendrez...

La seconde équation permet de sortir μ_o/μ_1 selon : $\frac{\mu_o}{\mu_1} = 1 - \mu_o \chi_T g(z_1 - z_o)$

Et on obtient la forme presque finale : $P_1 - P_o = -\frac{1}{\chi_T} Ln\big(1 - \mu_o \chi_T g(z_1 - z_o)\big)$

Le terme correctif dans le Ln est $x = \mu_o \chi_T g(z_1 - z_o) \approx 10^{-3}$ ce qui autorise un développement limité en x au voisinage de 0. A l'ordre 1 en x , on retrouve la loi de l'hydrostatique avec μ constant, il faut donc aller à l'ordre 2 et on trouve la formule proposée.

Pour l'AN , le terme principal (ordre 1) est 1000 bar, et le terme correctif (ordre 2) est 25 bars.

D) a)Pour évaluer le champ gravitationnel dans l'atmosphère, on peut utiliser le théorème de Gauss. A une hauteur h, on obtient $g(h) = g_o\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$ ce qui donne $\frac{g(h)}{g_o} = \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{-2} \approx 1 - 2\frac{h}{a}$

soit une variation relative de -3% sur une hauteur de 100km. On peut donc considérer le champ gravitationnel uniforme.

b)L'axe Oz est vertical ascendant. La loi de l'hydrostatique donne dP=-μ(z)gdz qui n'est pas intégrable car μ(z) n'est pas une constante.

A la hauteur z, le cylindre de section droite S et de hauteur dz a une masse dm=μ(z)Sdz=-(S/g)dP

Si on intègre sur toute la hauteur de l'atmosphère, soit dont de $P=P_o$=1bar jusqu'à P=0, on obtient la masse m d'air au-dessus de la section S sous la forme : $\frac{m}{S} = \frac{P_o}{g}$ ce qui n'est autre que la masse surfacique de l'atmosphère qui vaut donc environ 10^4kg/m^2.

c)La surface de la Terre est $S=4\pi a^2=5 10^{14}$m^2

et donc la masse de l'atmosphère vaut environ 5.10^{18}kg << M_T.

E) Si le ballon d'He n'est pas complètement gonflé (ce qui est le cas des ballons sondes météo), alos sa pression est la pression atmosphérique locale P_{atm}. En supposant que l'air et l'Hélium suivent la loi des gaz parfait à la température T , on a :

$$\frac{P_{atm}V}{RT} = \frac{m(He)}{M(He)} = \frac{m(air)}{M(air)}$$

où m(He) est la masse d'Hélium dans le ballon, et m(air) est la masse d'air déplacée qui apparaît dans l'expression de la poussée d'archimède Π, opposée du poids d'air déplacé.

$$\Pi = m(air)g = m(He)g.\left(\frac{M(air)}{M(He)}\right) \approx 7{,}5 Poids(He)$$

en prenant de l'hélium 4.

Conclusion : si Π est supérieur au poids total du ballon (enveloppe +hélium+nacelle), alors le ballon s'élève. On remarquera que ce bilan mécanique est valide tant que le ballon n'est pas complètement gonflé. La baisse de la densité de l'air est compensée par l'augmentation du volume du ballon.

On peut continuer l'étude. Notons h_1 la hauteur pour laquelle on atteint le volume maximum du ballon. Le bilan mécanique est toujours positif vers le haut donc le ballon continue à monter mais il se crée maintenant un différentiel de pression entre l'intérieur et l'extérieur du ballon, ce qui peut détruire l'enveloppe du ballon. De plus, la baisse de densité de l'air n'est plus compensée donc la poussée d'Archimède baisse peu à peu au cours de la montée. Il peut se passer deux choses :

a)on atteint l'équilibre mécanique avant la destruction de l'enveloppe du ballon et le ballon reste coincé.

b)L'enveloppe est détruite avant obtention de l'équilibre mécanique et la nacelle du ballon redescend pour qu'on puisse récupérer le matériel et les données expérimentales. C'est normalement ce qui est prévu.

Une dernière remarque : prenons une piscine remplie d'eau sur une hauteur de 10m ou plus. Peut-on parler de la pression P de l'eau ? En fait non. On peut définir le champ de pression dans l'eau : selon le point choisi, la pression varie entre 1 bar à la surface et 2 bars au fond de la piscine. Vous pouvez éventuellement définir la pression moyenne.

Si maintenant nous vidons la piscine, pouvons-nous parler de la pression de l'air dans la psicine ? Ici , on peut. Si nous supposons qu'au sommet la pression vaille 10^5Pa, la pression au fond de la piscine vaut 10^5Pa+120Pa, soit une variation relative de 0,1%, en prenant une masse volumique de 1,2kg.m^{-3}. Sur une hauteur de 10m, la pression de l'air varie suffisamment peu pour que le champ de pression puisse être supposé uniforme.