TD19 : Variables aléatoires

Exercice 1 (Mines-Ponts PC 2015)
Une pièce amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce une infinité de fois. On appelle « série » toute succession de lancers donnant le même côté de la pièce, succession interrompue par l'obtention de l'autre côté de la pièce. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire discrète égale à la longueur de la première série (resp. celle de la deuxième). Ainsi, par exemple, si on a obtenu : PPPFFP etc... alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

1. a) Déterminer la loi de X_1. *(*)*
  b) Prouver que $E(X_1)$ existe, calculer $E(X_1)$ et vérifier $E(X_1) \geqslant 2$.

2. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)
  b) En déduire la loi de X_2
  c) Calculer $E(X_2)$ puis calculer $V(X_2)$

3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? *(*)*

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2023)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X suit une loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que : $P(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$; $P(|X-n| \geqslant n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$; $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2019)
Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant $\mathscr{B}(p)$, $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et $M_n = \dfrac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$.

1. Citer la loi faible des grands nombres.

2. Les Y_i sont elles indépendantes ?

3. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

4. En déduire $P(|M_n - 2p| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ si $\varepsilon > 0$.

Exercice 4 (Centrale PSI 2021)
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier l'existence et calculer $E\left(e^{x\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a) Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Justifier que f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ un maximum $M_\alpha > 0$.
  b) Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant 2e^{-nM_\alpha}$

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2023)
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k = (X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geqslant 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que $P\left(\overline{\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$. *(*)*

2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T = n))_{n \in \mathbb{N}}$

3. Déterminer l'espérance de T

Exercice 6 (TPE-EIVP PSI 2015)
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} P(X = k) = 1$. *(*)*

2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?

3. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ? Une variance ?

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Déterminer la fonction génératrice de $2X$ et de $X + 1$. *(*)*

Exercice 8 **(CCINP PSI 2019)**

X et Y sont 2 variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $Z = 1+X+Y \sim \mathscr{G}(p)$.

1. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p. *(*)*

2. Calculer $G_X(t)$ et en déduire la loi de X.

Indications

Exercice 1

1. a) *Vue la suite, mieux vaut commencer directement par la loi du couple.*

3. *Discuter suivant p en commençant par examiner $P(X_1 = X_2 = 1)$ par exemple.*

Exercice 5

2. *Utiliser le SCE* $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$.

Exercice 6

1. *C'est plus rapide de commencer par la question* **2**.

Exercice 7

Utiliser plutôt la définition initiale de G_X : $G_X(t) = E\left(t^X\right)$.

Exercice 8

1. *Utiliser le théorème de comparaison pour justifier l'existence de l'espérance.*