

## ΠΙΙ2. Devoir en classe n°5. Samedi 1 février 2025. 4h.

### Proposition de solution.

#### Problème 1. Le moteur linéaire.

1) On a :  $x_P = v_c t - \frac{a}{2}$  et  $x_M = v_c t + a/2$

2) Le vecteur normal au cadre est le vecteur  $\vec{u}_z$ . le produit scalaire va donc se simplifier. Il faut intégrer le flux élémentaire sur la surface donc y variant de  $-a/2$  à  $+a/2$  et x variant de  $x_P$  à  $x_M$  déjà calculé. Ne pas oublier de multiplier par le nombre de spires N.

En adoptant la notation complexe, la phase calculatoire est un peu plus simple :

$$\underline{\Phi} = N \int_{-a/2}^{+a/2} dy \int_{v_c t - \frac{a}{2}}^{v_c t + a/2} B_m \exp^{j[\omega t - kx]} dx$$

On obtient :  $\underline{\Phi} = -\frac{2aN B_m}{k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \exp^{j[g_c \omega t]}$  soit :  $\Phi = \text{Re}(\underline{\Phi}) = -\frac{2aN B_m}{k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos[g_c \omega t]$

Il ne reste plus qu'à dériver par rapport au temps (on aurait pu garder la notation complexe) et on obtient la formule demandée avec  $\gamma = \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$ .

3a) Sur les côtés MQ et PN les deux forces sont orthogonales au déplacement et leur somme est nulle. Il ne reste donc à calculer que les deux contributions sur les segments PQ et MN.

3b)

Sur MN :  $d\vec{F}_{MN} = i_c(t) dy \vec{u}_y \wedge B_m \cos[\omega t - kx_M] \vec{u}_z = i_c(t) B_m \cos[\omega t - kx_M] dy \vec{u}_x$

qu'on intègre sans problème en :  $\vec{F}_{MN} = a i_c(t) B_m \cos[\omega t - kx_M] \vec{u}_x$

Sur PQ, on obtient de même :  $\vec{F}_{PQ} = -a i_c(t) B_m \cos[\omega t - kx_P] \vec{u}_x$

Il faut maintenant les ajouter et multiplier par N.

Soit on ajoute les deux sinusoides et on a de la trigo compliquée, soit on passe en complexe pour le champ magnétique. Ce que je vais faire :

$$\underline{\vec{F}} = N a i_c(t) B_m \{ e^{j[\omega t - kx_M]} - e^{j[\omega t - kx_P]} \} \vec{u}_x$$

On remplace les expressions de  $x_M$  et  $x_P$  et on sort :

$$\underline{\vec{F}} = N a i_c(t) B_m e^{j[g_c \omega t]} \{ e^{-j[ka/2]} - e^{+j[ka/2]} \} \vec{u}_x$$

Soit :

$$\underline{\vec{F}} = -2j N a i_c(t) B_m e^{j[g_c \omega t]} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \vec{u}_x$$

Il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle :

$$\vec{F} = +2 N a i_c(t) B_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \sin[g_c \omega t] \vec{u}_x$$

4) A l'aide du schéma électrique (DESSIN OBLIGATOIRE) on obtient :  $i_c(t) = \frac{e(t)}{r}$ .

5) La puissance dissipée par effet Joule est alors :  $p_J(t) = i_c(t) e(t) = \frac{e^2(t)}{r}$

On sort :  $p_J(t) = \frac{1}{r} 4(aN B_m v_o g_c \gamma)^2 \sin^2(g_c \omega t)$

dont la valeur moyenne temporelle est :  $P_{mJ} = \langle p_J(t) \rangle = \frac{2}{r} (aN B_m v_o g_c \gamma)^2$

La puissance la force de Laplace est :  $p_L(t) = \vec{F} \cdot v_c \vec{u}_x$

En introduisant l'expression de  $i_c(t)$  dans la formule, on obtient :

$$p_L(t) = 2 N a B_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right) v_c \sin[g_c \omega t] \cdot \frac{2 a N B_m v_o g_c \gamma \sin(g_c \omega t)}{r}$$

soit :  $p_L(t) = \frac{4 v_o g_c v_c}{r} (N a B_m \gamma)^2 \sin^2[g_c \omega t]$ .

Et finalement :  $P_{mL} = \langle p_L(t) \rangle = \frac{2 v_o g_c v_c}{r} (N a B_m \gamma)^2$

Le champ électromagnétique doit fournir ces deux puissances donc :  $P_{em} = P_{mJ} + P_{mL}$

On sort maintenant :  $P_{mL} = \frac{v_c}{g_c v_o} P_{mJ} = \frac{1-g_c}{g_c} P_{mJ}$  d'où  $P_{em} = \frac{1}{g_c} P_{mJ}$

6)  $P_{mJ}$  est forcément positif;  $g_c$  est positif ou négatif selon que  $v_c < v_o$

Pour  $g_c < 0$ ,  $P_{mL} < 0$  et  $P_{em} < 0$  : la force de Laplace est résistante et le champ électromagnétique reçoit de l'énergie : frein générateur

Pour  $0 < g_c < 1$ ,  $P_{mL} > 0$  et  $P_{em} > 0$  : moteur récepteur.

Pour  $g_c > 1$ ,  $P_{mL} < 0$  et  $P_{em} > 0$  : frein récepteur.

7) Si on prend l'équation de Maxwell-Ampère, on peut faire apparaître le champ électrique :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{c^2 B_m}{v_o} \cos[\omega t - kx] \vec{u}_y$$

### **Problème 2. Extrait centrale psi2022.**

Q16)  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

Q17) Équation locale de conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$

La loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , dans l'eau de caractéristiques supposées uniformes donne

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div } \vec{E}$$

et enfin en utilisant la loi de Maxwell-Gauss dans l'eau

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau}; \tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

$$\tau = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\gamma} = \frac{75 \times 8,85 \times 10^{-12}}{5} = 1,33 \times 10^{-10} \text{ s}$$

la période d'une onde de fréquence  $f = 1 \text{ MHz}$  vaut  $T = 1 \times 10^{-6} \text{ s} \gg \tau$ . L'équation différentielle vérifiée en tout point par la densité volumique de charge a pour solution

$$\rho(t, M) = \rho(0, M) e^{-t/\tau}$$

donc suite à une perturbation la charge volumique s'annule avec une constante de temps  $\tau$  très faible devant la période de l'onde : on peut donc considérer qu'à tout instant la densité volumique de charge est nulle.

Q19) équation de Maxwell-Ampère :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \gamma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

- courant de conduction :  $\gamma \vec{E}$
- courant de déplacement  $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En ordre de grandeur pour des phénomènes de pulsation  $\omega$

$$\frac{\epsilon \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega \left\| \vec{E} \right\|}{\gamma \left\| \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega}{\gamma}$$

Par conséquent le courant de déplacement devient supérieur au courant de conduction si

$$\omega > \omega_c = \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{1}{\tau} = 7,5 \times 10^9 \text{ rads}^{-1}$$

Q20) Si  $\omega \ll \omega_c$ , le terme de courant de déplacement est négligeable devant le terme de courant de conduction, et l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie en

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à la relation

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le conducteur  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon = 0$  et l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée conduisent, en supposant la conductivité du milieu indépendante du temps, à la relation

Wie Gott in Frankreich.

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial(\mu_0\gamma\vec{E})}{\partial t} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Soit l'équation de diffusion du champ électrique

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\gamma}\vec{\Delta}\vec{E} = D\vec{\Delta}\vec{E}$$

Q21) Pour l'onde électromagnétique donnée dans l'énoncé

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E} \quad ; \quad \vec{\Delta}\vec{E} = -\underline{k}^2\vec{E}$$

On reporte ces expressions dans l'équation de diffusion

$$i\omega\vec{E} = -\frac{\underline{k}^2}{\mu_0\gamma}\vec{E}$$

d'où la relation de dispersion ( $\vec{E} \neq \vec{0}$ ) en projetant sur l'axe Ox :

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega = e^{-i\pi/2}\mu_0\gamma\omega$$

On en déduit

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4}\sqrt{\mu_0\gamma\omega} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} = \pm\frac{1-i}{\delta}$$

$$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$$

Pour  $f = 1,0\text{MHz}$ ,  $\gamma = 5\text{ S m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7}\text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\delta = 22\text{ cm}$$

La solution est une combinaison linéaire des deux solutions trouvées. Une des deux est divergente lors de la propagation et ne correspond donc pas à une solution physiquement acceptable.

L'onde se propageant selon les  $z$  croissants, on ne conserve que la racine de partie réelle positive :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{1-i}{\delta}z\right)\right)\vec{e}_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{e}_x$$

L'équation de Maxwell-Faraday  $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  s'écrit pour l'onde électromagnétique en notation complexe, en notant que le vecteur d'onde  $\vec{k} = \underline{k}\vec{e}_z$

$$-i\underline{k} \wedge \vec{E} = -\omega\vec{B};$$

$$\vec{B} = \frac{\underline{k}\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega}E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \underline{k}z\right)\right)\vec{e}_y = \frac{1-i}{\delta\omega}E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{e}_y$$

Q22) Le calcul du vecteur de Poynting (grandeur quadratique) nécessite le passage en notation réelle. Comme le terme de propagation s'écrit

$$\exp\left(i\left(\omega t - \underline{k}z\right)\right) = \exp\left(i\left(\omega t - \frac{(1-i)z}{\delta}\right)\right) = \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$

les champs réels ont pour expressions

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{E_0\sqrt{2}}{\delta\omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_y = \frac{E_0}{\delta\omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{e}_y$$

par conséquent

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_z = \dots$$

$$\dots \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)\vec{e}_z$$

puis

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)\vec{e}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)\vec{e}_z$$

Wie Gott in Frankreich.

Q23) D'après la relation précédente

$$\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \| = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)$$

donc

$$\frac{\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}(z + L, t) \rangle \|} = \frac{\exp(-2(z + L)/\delta)}{\exp(-2z/\delta)} = \exp\left(\frac{-2L}{\delta}\right)$$

avec  $\delta = 0,22$  m et  $L = 10$  m, on obtient

$$\frac{\| \langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}(z + L, t) \rangle \|} = \exp(-91) = 3 \times 10^{-40}$$

Q24) L'application numérique précédente montre qu'il est irréaliste d'envisager la communication avec le sous-marin par ondes électromagnétiques, à cause de l'atténuation très rapide de l'amplitude de ces ondes avec la distance de propagation dans la mer.

**Problème 3. Extrait centrale pc 2023.**

Q14. On suppose que la densité de courant  $\vec{j}_{\text{él}}$  dans le plasma est due uniquement au mouvement des électrons,  $\vec{j}_{\text{él}} = -ne\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse des électrons déduite du pfd en supposant que l'électron n'est soumis qu'à la partie électrique de la force de Lorentz.

$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$  soit en notation complexe  $i\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E}$  d'où  $\vec{j}_{\text{él}} = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}$  d'après la loi d'Ohm locale d'où  $\underline{\sigma} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e}$   
d'où  $\alpha = \frac{ne^2}{m_e}$ .

Q15. A partir des équations de Maxwell dans le plasma et  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

MG  $\text{div}\vec{E} = 0$  plasma neutre

MF  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

MA  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{él}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

On obtient  $\Delta\vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial\vec{j}_{\text{él}}}{\partial t}$  équation linéaire pouvant s'écrire en complexe

Avec  $\vec{E}(z, t) = \underline{E}_x(z, t) \vec{e}_x$  et  $\vec{j}_{\text{él}} = \underline{\sigma} \vec{E}$  :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{E}_x(z, t)}{\partial t}$$

Q16 Relation de dispersion à partir de  $\underline{E}_x(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t + kz))$  et  $\underline{\sigma} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e}$  en remplaçant dans l'équation précédente :  $(ik)^2 = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 + \mu_0 \left(-i \frac{ne^2}{\omega m_e}\right) i\omega$ . On fait alors apparaître la pulsation de plasma dans le calcul.

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Le plasma est dit transparent lorsque l'onde peut se propager sans atténuation, c'est-à-dire lorsque  $k^2$  est un réel positif. Il faut donc  $\omega > \omega_p$

Q17 Déterminons la valeur de  $f_p = \omega_p / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}} = \frac{1}{2\pi} * 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{10^{12}}{8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 8,95 \cdot 10^6$  Hz

$f_p \approx 9$  MHz  $\ll \nu_1 = 1575,4$  MHz et  $\nu_2 = 1227,6$  MHz.

Le plasma est donc transparent pour le paquet d'onde envoyé.

Q18 Vitesse de phase :  $v_\phi = \omega/k = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

Q19 Vitesse de groupe, c'est la vitesse de propagation du paquet d'onde,  $v_g = d\omega/dk$

En différenciant  $k^2 : 2kdk = 2\omega d\omega/c^2$   $V_g = c^2 k/\omega = c^2 / V_\phi = c \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega}}$

Q20 Tracés classiques, cf cours.

Les fréquences des signaux GPS étant très supérieures à la fréquence de coupure du plasma on peut approximer  $V_\phi$  et  $V_g$  à  $c$  : le plasma se comporte comme du vide.

Q21 D'après la relation de MF :  $\vec{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ou  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  en utilisant la dérivation formelle avec

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x = E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x \quad i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \text{ soit}$$

$$\vec{B} = -\frac{-k\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y$$

Dans la force de Lorentz, on a négligé  $(-e)v \wedge \vec{B}$  devant  $(-e)\vec{E}$  or  $\frac{|v \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{vE_0/c}{E_0} = \frac{v}{c} \ll 1$  pour un électron non relativiste ce qui justifie l'approximation faite.

Q22 Soit  $\tau$  le retard ionosphérique défini par  $\tau = t_{\text{plasma}} - t_{\text{vide}} = d(1/V_g - 1/c)$  où  $d$  est la distance parcourue dans le plasma.

$$\tau = \frac{d}{c} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} - 1 \right) = \frac{d}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} - 1 \right) \approx \frac{d}{2c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{en effectuant en DL car } \omega_p \ll \omega$$

Q23. Si on confond la vitesse de groupe et  $c$ , on se trompe sur la distance entre le capteur et le satellite de :

$$\text{erreur} = c\tau \approx \frac{d}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx 20m$$

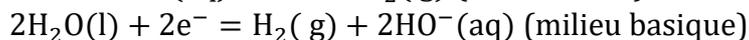
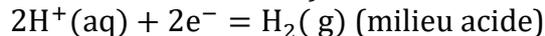
Il faut donc tenir compte de la présence de l'ionosphère si on veut une meilleure précision. C'est d'ailleurs une raison de la présence d'un second paquet d'onde.

#### **Problème 4. Extrait centrale psi 2022.**

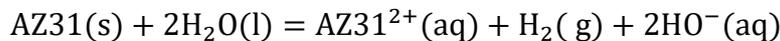
Q11) Les courbes intensité-potential données montrent que - le barreau cylindrique d'AZ31 s'oxyde en  $AZ31^{2+}$  selon la demi-réaction



- l'eau est réduite en dihydrogène à la surface des anneaux en nickel, d'où le dégagement gazeux (principe de la pile de corrosion, l'oxydation et la réduction sont séparées géographiquement) selon la demi-réaction (écrite successivement en milieu acide puis en milieu neutre ou basique qui correspond mieux à l'eau de mer)



soit l'équation-bilan



correspondant à l'échange de 2 électrons.

Q12) L'avancement maximal  $\xi_{\text{max}}$  correspondant à la corrosion complète de la tige selon l'équation-bilan précédente a pour expression

$$\xi_{\text{max}} = n(AZ31) = \frac{\rho(AZ31)V_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(AZ31)} = \frac{\rho(AZ31)\pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(AZ31)}$$

Q13) À l'instant initial, l'aire de la tige en contact avec l'eau s'écrit, en négligeant les effets de bord (la géométrie du raccord anneau/tige n'est pas simple d'autant que le rayon de la tige est plus grand que le rayon des anneaux),  $S_0 = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}}$ , soit un courant de corrosion

$$i_{\text{corr}} = S_0 j_{AZ31} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} j_{AZ31}$$

Q14) Les courants électrique anodiques et cathodiques sont opposés. Mais ici, les surfaces des deux métaux en contact avec l'eau ne sont pas du tout les mêmes. Or, en ordonnée, on a mis les courants par unité de surface.

Allons un peu plus loin au début :

À l'instant initial on relève sur le schéma de la goupille les dimensions suivantes :

- anneaux : rayon moyen  $R = 0,885$  cm, rayon de la section  $r = 0,14$  cm, surface totale des deux anneaux :  $S_{\text{anneaux}} = 8\pi^2 r R = 9,8$  cm<sup>2</sup>
- tige : rayon  $r_{\text{tige}} = 0,19$  cm, longueur  $L_{\text{tige}} = 1,5$  cm, surface latérale  $S_{\text{tige}} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} = 1,8$  cm<sup>2</sup>, section  $\pi r_{\text{tige}}^2 = 0,11$  cm<sup>2</sup>, volume :  $V_{\text{tige}} = \pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}} = 0,17$  cm<sup>3</sup>

La corrosion se fait pour une différence de potentiel nulle entre les deux métaux (en court-circuit, la résistance de l'électrolyte étant négligée), pour des courants d'électrode opposés (conservation du courant), soit la relation

$$i_{\text{corr}} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} j_{\text{AZ31}} = S_{\text{anneaux}} |j_{\text{cathode}}|$$

d'où à l'instant initial

$$\frac{j_{\text{AZ31}}}{-j_{\text{cathode}}} = \frac{S_{\text{anneaux}}}{S_{\text{tige}}} = \frac{9,8}{1,8} = 5,4$$

En utilisant le graphique, on trouve pour un potentiel de corrosion  $E = -600\text{mV}$ ,  $j_{\text{cathode}} = -0,0075 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ ,  $j_{\text{AZ31}} = 0,034 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ , soit un rapport  $\frac{j_{\text{AZ31}}}{j_{\text{cathode}}} \approx 4,5$ : on en déduit qu'initialement le potentiel de corrosion est légèrement supérieur à  $-600\text{mV}$ , et correspond à une intensité de corrosion approximative, calculée à partir des données sur les anneaux (la pente de la courbe est plus faible, donc moins sensible aux écarts sur le potentiel de corrosion), égale à

$$j_{\text{cathode}} S_{\text{anneaux}} \approx 0,7 \times 9,8 = 0,07 \text{ A}$$

L'avancement maximal de la réaction vaut

$$\xi_{\text{max}} = \frac{\rho(\text{AZ31})\pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(\text{AZ31})} = 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

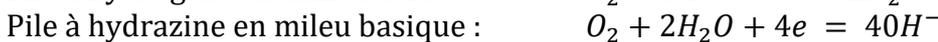
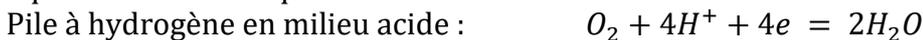
pour une équation bilan mettant en jeu deux électrons, donc la durée de corrosion complète de la tige a pour expression, en supposant négligeable l'influence de la surface de la tige

$$\tau = \frac{2\mathcal{F}\xi_{\text{max}}}{I} = 33,4 \times 10^4 \text{ s} = 9,3 \text{ h}$$

L'estimation est évidemment grossière. Pour une mission de quelques heures, c'est bon. Environ 9h après le début de la mission, le ballast est naturellement libéré et le sous-marin remonte.

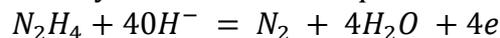
**Problème n°5. Extrait Centrale psi 2017.**

A.1) Pour chacune des piles, le dioxygène est l'oxydant (potentiel le plus élevé) d'où les demi-équations électroniques :



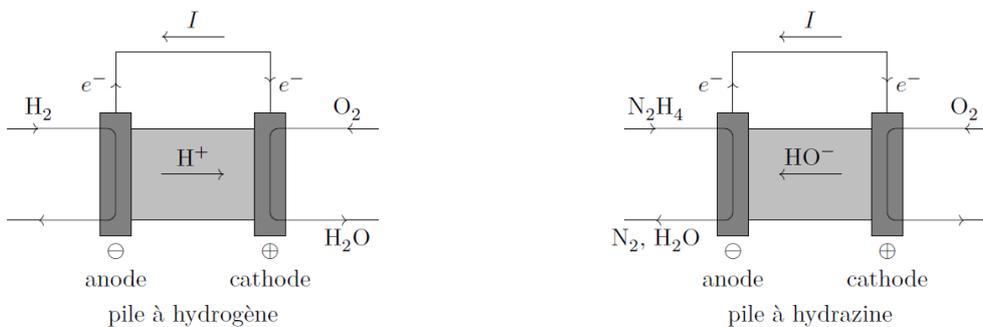
Pour la pile à hydrogène,  $H_2$  est oxydé en eau en milieu acide selon:

Pour la pile à hydrazine, celle-ci est oxydée en milieu basique selon :



en écrivant d'abord :  $N_2H_4 = N_2 + 4H^+ + 4e$

A.2)



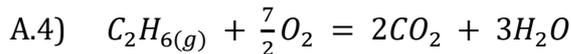
L'électrode où se forme l'eau, produit de la réaction, dépend du caractère acide ou basique de l'électrolyte.

A.3) Pour les deux piles, on écrit l'équilibre  $Q=K$  en disant que les potentiels sont égaux à l'équilibre.

Pour la pile à hydrogène, le bilan est :  $2H_2 + O_2 = 2H_2O$  avec échange de 4 électrons.  $K_o=10^{82}$

Pour la pile à hydrazine, le bilan est:  $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$  avec échange de 4 électrons.  $K_a=10^{104}$

Les deux constantes sont très grandes devant 1, donc les réactions ont totales.



La combustion produit une quantité de chaleur qui ne peut être totalement convertie en travail dans une machine thermique cyclique, tandis que dans la pile à combustible l'énergie chimique est directement transformée en travail électrique.

B.1) Les électrodes utilisées dans les piles à combustibles ne doivent pas participer aux réactions d'électrodes (électrodes inertes).

B.2) le domaine d'immunité est le domaine d'existence du métal dans le diagramme : dans ce domaine de valeurs du potentiel et du pH le métal est stable ; les domaines de corrosion sont les domaines dans lesquels le métal est oxydé en ions solubles, qui ne peuvent former une couche protectrice séparant le métal des espèces oxydantes en solution : l'oxydation du métal se poursuit tant que l'état du système est représenté par un point appartenant à un domaine de corrosion ; les domaines de passivation sont les domaines dans lesquels le métal est oxydé pour former des espèces insolubles pouvant se déposer à la surface du métal et former une couche imperméable séparant le métal des espèces oxydantes et bloquant les réactions d'oxydation du métal : une fois cette couche formée, le métal est protégé contre la poursuite de son oxydation par passivation.

les domaines A, B, C correspondent aux domaines de stabilité respectifs de H<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et O<sub>2</sub>.

B.3)

L'électrolyte de la pile à hydrogène est très acide, or pour des pH inférieurs à 5, le domaine de stabilité de l'eau n'a de partie commune qu'avec le domaine de corrosion du cobalt et du nickel : ces deux métaux sont corrodés dans le domaine de pH de l'électrolyte et ne peuvent pas servir d'électrodes inertes, contrairement au platine qui ne présente à tout pH qu'un domaine de d'immunité et un domaine de passivation : il n'est pas possible d'utiliser des électrodes de platine ou de cobalt pour la pile à hydrogène ; des électrodes de platine conviennent.

l'électrolyte de la pile à hydrazine est basique, domaine de pH dans lequel le domaine de stabilité de l'eau correspond aux domaines d'immunité et de passivité du cobalt et du nickel : il est possible d'utiliser ces métaux pour les électrodes de la pile à hydrazine. L'intérêt par rapport au platine est le coût bien moindre de ces métaux.