I Topologie et densité

Exercice 1 *[Solution]*
Soient $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $E_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(A) \leqslant p\}$

1. Montrer que $A \in E_p$ si et seulement si tous les déterminants d'ordre $p+1$ extraits de A sont nuls.

2. En déduire que E_p est fermé.

Exercice 2 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels croissante. Donner une CNS pour que $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.
indication : il peut être plus facile ici de traduire les propriétés avec des boules plutôt que des suites.

Exercice 3 *[Solution]*
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
indication : trigonaliser et « perturber » les coefficients diagonaux pour obtenir des valeurs propres distinctes.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2008)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX - B\| = \inf\limits_{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|AY - B\|$.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note Ω_P l'ensemble des complexes r tels que $P(X) + r$ soit à racines simples dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.

2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note Θ_P l'ensemble des réels r tels que $P(X) + r$ soit scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que Θ_P est ouvert puis que c'est un intervalle.
   indication : faire un dessin d'un polynôme à racines simples.
   b) Déterminer les polynômes pour lesquels Θ_P n'est pas borné.

Exercice 6 **(Centrale MP 2011)** *[Solution]*

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$.

2. On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ équidistantes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}\left(M^2\right) = 0\right\}$

3. E est-il fermé ? borné ?
indication : pour non borné, il suffit de trouver une matrice non nulle dans E et d'utiliser la positive homogénéité.

4. Déterminer les points intérieurs de E.
indication : il n'y en a pas, utiliser $A_p = A + \dfrac{1}{p} I_n$ en supposant A intérieur à E.

II Applications continues

Exercice 7 *[Solution]*

1. Montrer que $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $g : (x,y) \mapsto \dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E. On pose $f(t) = \|a + tb\|$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle continue, lipschitzienne ?

2. Si elles existent, calculer $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)$.

3. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R}, a + bt \in B(0,1)\}$ est un intervalle ouvert ou vide.

Exercice 9 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit E un evn et $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Montrer que f induit une bijection de E sur $B(0,1)$.

2. Montrer que f est lipschitzienne, que f^{-1} est continue mais non lipschitzienne.

Exercice 10 *[Solution]*
Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, K une partie fermée et bornée de E et $f : K \to E$ telle que $f(K) \subset K$ et $\forall (x,y) \in K^2$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
En utilisant l'application $\varphi : x \in \mathbb{K} \mapsto \|f(x) - x\|$, montrer que f admet un unique point fixe dans K.

III Applications linéaires

Exercice 11 *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$.
Déterminer une constante k telle que φ_A soit k-lipschtzienne pour $\varphi_A : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1)$ puis pour $\varphi_A : (E, \|.\|_\infty) \to (E, \|.\|_\infty)$.
Déterminer les plus petites constantes possibles.

Exercice 12 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$. Déterminer les plus petites constantes $C > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^3, \|AX\| \leqslant C\|X\|$ si la norme est $\| \|_1$, puis $\| \|_\infty$, puis $\| \|_2$.

Exercice 13 **(Mines-Ponts MP 2002)** *[Solution]*

1. Montrer que $N_k : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{k} |P(i)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_k[X]$.
2. Déterminer k telle que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & X^2P' \end{array} \right.$ soit k-lipschitzienne. Puis déterminer la plus petite constante k possible.

Exercice 14 *[Solution]*
On note $l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Montrer que les applications $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ et $\Delta : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ sont continues.
2. Justifier l'existence et calculer $\sup\limits_{u \in S(0,1)} \|T(u)\|_\infty$ et $\sup\limits_{u \in S(0,1)} \|\Delta(u)\|_\infty$.

Exercice 15 *[Solution]*
On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et pour $\varphi \in E$, on définit $T : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \varphi(t) f(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$

1. Montrer que T est continue sur $(E, \|.\|_2)$ et calculer $\sup\limits_{\|f\|_2 = 1} |T(f)|$.
2. Dans cette question, $\varphi = id_{[0,1]}$, montrer que T est continue sur $(E, \|.\|_1)$ et calculer $\sup\limits_{\|f\|_1 = 1} |T(f)|$.
3. On suppose $\varphi > 0$, montrer que T est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$ et calculer $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} |T(f)|$.
4. Si $\varphi \in E$ est quelconque, montrer que T est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$ et calculer $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} |T(f)|$.

   indication : introduire $f_n(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}$.

Exercice 16 *[Solution]*
Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit N_1 et N_2 par $N_1(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left| P^{(k)}(0) \right|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une constante k, indépendante de n telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], N_1(P') \leqslant kN_1(P)$.
3. Existe-t-il une constante k, indépendante de n telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], N_2(P') \leqslant kN_2(P)$?

Exercice 17 *[Solution]*
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on pose $u(f)(x) = f(x) - f(0)$.

1. Montrer que $u : f \mapsto u(f)$ est continue pour la norme $\|.\|_\infty$ et calculer $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} \|u(f)\|_\infty$.
2. Montrer que u n'est pas continue pour $\|.\|_1$.

Exercice 18 *[Solution]*
Soit p un projecteur non nul de E, euclidien.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   indication : calculer $\|p(x + ty)\|$ *avec* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \ker(p)$ *et* $y \in \mathrm{Im}(p)$.
2. En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée et bornée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 19 *[Solution]*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], E)$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On pose, pour $f \in E$, $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E 1-lipschitzien. Existe-t-il f telle que $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire φ^n est $\dfrac{1}{n!}$-lipschitzien.
indication : justifier que $\varphi^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer $(\varphi^n(f))^{(k)}(0)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 20 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et φ une forme linéaire sur E

1. Montrer que φ est continue sur E si et seulement si φ est continue en 0.

2. On pose $N = \sup\{|\varphi(f)|, f \in E, \|f\|_\infty \leqslant 1\}$

a) Que vaut N si $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$?

b) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $|\varphi(f)| = N$?

Exercice 21 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_\infty$.

3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_1$.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$ alors toute famille de $p+1$ colonnes de A est liée donc il existe une combinaison linéaire non triviale $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i C_{j_i} = 0$ de ces colonnes ; en tronquant les colonnes (enlever $n-p-1$ lignes) la combinaison linéaire reste nulle donc les colonnes tronquées restent liées et le déterminant restant sera nul. Réciproquement, si $\mathrm{rg}(A) \geqslant p+1$ il existe $p+1$ colonnes linéairement indépendantes $C_{j_1}, \dots, C_{j_{p+1}}$ donc $B = (C_{j_1} \dots C_{j_{p+1}})$ est de rang $p+1$, comme ${}^tB$, il existe donc $p+1$ colonnes de ${}^tB$ linéairement indépendantes ; en conservant ces colonnes, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ extraite de A et de rang $p+1$ donc un déterminant non nul.

2. Si Γ est l'ensemble des couples (I, J) où I et J sont des parties de $[\![1, n]\!]$ à $p+1$ éléments, on vient de prouver $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall (I, J) \in \Gamma, \det((a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}) = 0\}$ donc $E = \bigcup_{(I,J)\in\Gamma} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det((a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}) = 0\}$.
Comme $A \mapsto (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est linéaire, elle est continue, tout comme le déterminant ; on en déduit que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det((a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}) = 0\}$ est fermé donc E aussi.

Exercice 2 *[sujet]* On distingue si (u_n) converge ou non :

— Si (u_n) CV vers $l \in \mathbb{R}$ et si E est fermé alors $l \in E$ ce qui signifie qu'il existe un n_0 tel que $u_{n_0} = l$, la suite est alors stationnaire puisqu'elle est croissante ; réciproquement, si (u_n) est stationnaire alors $E = \{u_n, n \leqslant n_0\}$ est un ensemble fini donc fermé.

— Sinon, (u_n) tend vers $+\infty$ et si $a \notin E$ alors il existe n tel que $u_n < a < u_{n+1}$ et par croissance, on aura $a \in]u_n, u_{n+1}[\subset \mathbb{R} \setminus E$ donc E est fermé.

Exercice 3 *[sujet]* $A = PTP^{-1}$ et on pose T_k la matrice triangulaire dont tous les coefficients sont ceux de T sauf les coefficients diagonaux qui valent $t_{i,i} + \frac{1}{k}$; si k est assez grand, les coefficients diagonaux (donc les valeurs propres) de T_k sont 2 à 2 distinctes et T_k est DZ donc $B_k = PT_kP^{-1}$ aussi. Enfin $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = T$ et par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$, on a $A = \lim\limits_{k\to+\infty} B_k$.

Exercice 4 *[sujet]* Soit $d = \inf\limits_{Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|AY - B\| = d(B, \mathrm{Im}(A))$; $f : Z \mapsto \|Z - B\|$ est continue donc admet un minimum sur le fermé borné non vide $\mathrm{Im}(A) \cap B_f(B, d+1)$ (car $\mathrm{Im}(A)$ est un sev de dimension finie donc fermé) ; soit Z_0 réalisant ce minimum, comme $Z_0 \in \mathrm{Im}(A)$, il existe X_0 tel que $Z_0 = AX_0$. Reste à vérifier que $\|AX_0 - B\| \leqslant \|AY - B\|$ pour tout Y : c'est déjà vérifié si $AY \in B_f(B, d+1)$ et si $AY \notin B_f(B, d+1)$ alors $\|AY - B\| > d + 1 \geqslant \|AX_0 - B\|$.

Exercice 5 *[sujet]* **1.** Soit r tel que $P(X) + r$ ait une racine multiple, on a alors $P(z) + r = P'(z) = 0$ donc z est une racine de P' qui possède un nombre fini de racines $z_1, \dots, z_k$ puis on a $r = -P(z_i)$ donc un nombre fini de valeurs de r.

2. a) (s'aider du tableau de variations pour comprendre) : soit r_0 tel que $P(X) + r_0$ soit SARS et $\varepsilon < \min\{|P(x) + r_0|, P'(x) = 0\}$ (qui existe car P' a un nombre fini de racines), ie inférieur à la plus courte distance entre l'axe des abscisses et les points du graphe à tangente horizontale. Alors pour $r \in]r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon[$, $P(X) + r$ reste SARS donc Θ_P est ouvert.

b) Si $\deg(P) \geqslant 2$ alors Θ_P est borné : en translatant le graphe de P vers le haut ou vers le bas, on finira par obtenir un polynôme qui s'annule au plus 2 fois (si P est de degré pair ; une seule fois pour le degré impair) ; réciproquement, si $\deg(P) = 1$ alors $\Theta_P = \mathbb{R}$ n'est pas borné.

Exercice 6 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. Comme la décomposition de M suivant cette somme directe est $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$, on a $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M - {}^tM\|$ et $d(M, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\|M + {}^tM\|$; en développant $\mathrm{Tr}\left({}^t(M - {}^tM)(M - {}^tM)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t(M + {}^tM)(M + {}^tM)\right) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M^2) = 0$.

3. $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ est continue (polynômiale) donc E est fermé. Par contre E n'est pas borné car $kE_{1,2}$ est dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\|kE_{1,2}\| = k\|E_{1,2}\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

4. Si A est intérieur à E alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset E$ et si p est assez grand, on a $A_p \in B(A, \varepsilon)$ ce qui est absurde car $\mathrm{Tr}(A_p^2) = 2p\,\mathrm{Tr}(A) + np^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ donc $A_p \notin E$ pour p grand.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** On a $\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** Par inégalité triangulaire, on a $|f(t) - f(t')| \leqslant \|(t - t')b\| = \|b\| \times |t - t'|$ donc f est lipschitzienne

2. Tjs par inégalité triangulaire, on a $f(t) \geqslant |t|\|b\| - \|a\|$ donc $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$.

3. $t \in I \Leftrightarrow f(t) < 1$; si $I \neq \emptyset$ et $(t,t') \in I^2$, $\lambda \in]0,1[$, on a $f(\lambda t + (1-\lambda)t') = \|\lambda(a+tb) + (1-\lambda)(a+t'b)| \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda) f(t') < \lambda + (1-\lambda) = 1$ donc $\lambda t + (1-\lambda)t' \in I$, I est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $I = \{t \in \mathbb{R}, f(t) < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $f(x) = y \Rightarrow \|y\| = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$ donc $f(x) \in B(0,1)$ et $\|x\| = \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|}$ puis $x = \dfrac{y}{1-\|y\|}$ donc f est injective ; on vérifie finalement que $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$

2. $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|(x-y) + \|y\|(x-y) + (\|y\| - \|x\|)y\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \leqslant 2\|x-y\| + \dfrac{\|y\|}{(1+\|y\|)}\|x-y\| \leqslant 3\|x-y\|$.
Par quotient, f^{-1} est continue par quotient mais non lipschitzienne sinon elle serait bornée sur $B(0,1)$ car $\|f^{-1}(x)\| \leqslant \|f^{-1}(0)\| + k\|x-0\| \leqslant k$ ce qui n'est pas le cas

Exercice 10 *[sujet]* φ est continue donc admet un minimum en $\alpha \in K$; si $\varphi(\alpha) \neq 0$ alors $\varphi(f(\alpha)) < \varphi(\alpha)$ ce qui est absurde. Si on a un second point fixe en $\beta \neq \alpha$ alors $\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|$ qui est absurde

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $|(AX)_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j|$ donc $\|AX\|_1 \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \|X\|_1 \times \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$ avec égalité pour X le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulle sauf une, d'indice k tel que $\displaystyle\max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}|$

2. $|(AX)_i| \leqslant \|X\|_\infty \times \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ avec égalité pour X tel que $x_i = \dfrac{a_{k,j}}{|a_{k,j}|}$ si $a_{k,j} \neq 0$, 1 sinon avec k tel que $\displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|$

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Pour $\|\ \|_1$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $AX = \begin{pmatrix} x + (y+z)/2 \\ \sqrt{3}(3y+z)/6 \\ z\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$ donc $\|AX\|_1 = \left|x + \dfrac{1}{2}(y+z)\right| + \dfrac{\sqrt{3}}{6}|3y+z| + \sqrt{\dfrac{2}{3}}|z| \leqslant \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)(|x|+|y|+|z|)$; $C = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ est la plus petite constante puisque l'égalité est atteinte pour $X = e_3$.

2. Pour $\|\ \|_\infty$, en majorant les valeurs absolue des 3 coordonnées de AX en fonction de $\|X\|_\infty$, on trouve $\|AX\|_\infty \leqslant 2\|X\|_\infty$, l'égalité est cette fois atteinte avec $X = (1,1,1)$

3. Pour $\|\ \|_2$: on a $\|AX\|_2^2 = {}^tX\,{}^tAAX$; on diagonalise ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = P\mathrm{diag}(1/2, 1/2, 2)\,{}^tP$ avec P orthogonale. Comme P est orthogonale, on a $\|PX\|_2 = \|X\|_2$ donc $\|AX\|_2^2 = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + 2\gamma^2$ si $PX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ puis $\|AX\|_2^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 2\|X\|_2^2$. La plus petite constante est donc $C = \sqrt{2}$ puisque l'égalité est obtenue pour tout vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre 2.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** Si $N_k(P) = 0$ alors P possède $k+1$ racines distinctes donc $P = 0$; le reste est facile

2. On choisit la base $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ dans $\mathbb{R}_2[X]$: si $P = aX(X-1) + bX(X-2) + c(X-1)(X-2)$ alors $N_2(P) = 2|a| + |b| + 2|c|$ puis $\varphi(P) = aX^2(2X-1) + bX^2(2X-2) + cX^2(2X-3)$ et $N_3(\varphi(P)) \leqslant 58|a| + 44|b| + 32|c| \leqslant 44N_2(P)$ avec égalité pour $P = X(X-2)$

Exercice 14 *[sujet]* T et Δ sont linéaires sur E.

1. On a $|u_{n+1}| \leqslant \|u\|_\infty$ donc $\|T(u)\| \leqslant \|u\|_\infty$ et T est continue.
De même, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2\|u\|_\infty$ donc $\|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty$ et Δ est continue.

2. On a déjà l'existence des deux bornes supérieures puisque T et Δ sont bornées sur $S(0,1)$ d'après la question précédente. De plus $S_1 = \displaystyle\sup_{S(0,1)} \|T\|_\infty \leqslant 1$; si u est la suite constante égale à 1 (qui est dans $l^\infty(\mathbb{R})$), on a $\|u\|_\infty = 1$ et $\|T(u)\|_\infty = 1$ donc $S_1 = 1$ (et c'est en fait un maximum).
On a aussi $S_2 = \displaystyle\sup_{S(0,1)} \|\Delta\|_\infty \leqslant 2$ et cette fois, si $u_n = (-1)^n$ (qui est dans $l^\infty(\mathbb{R})$), on a $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$ donc $S_2 = 2$ (et c'est aussi un maximum).

Exercice 15 *[sujet]* T est une forme linéaire sur E.

1. On a $|T(f)| \overset{\text{C-Sch}}{\leqslant} \|\varphi\|_2 \times \|f\|_2$ donc φ est continue sur $(E, \| \|_2)$ et $S_2 = \sup\limits_{\|f\|_2=1} |T(f)| \leqslant \|\varphi\|_2$; avec $f = \dfrac{1}{\|\varphi\|_2}\varphi$, si $\varphi \neq 0$, (qui est dans E), on a $\|f\|_2 = 1$ et $T(f) = \|\varphi\|_2$ donc $S_2 = \|\varphi\|_2$ (qui reste valable si $\varphi = 0$ puisque T serait nulle).

2. $|T(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$ donc T est continue sur $(E, \| \|_1)$ et $S_1 \leqslant 1$; avec $f_n(t) = (n+1)t^n$, on a $\|f_n\|_1 = 1$ et $T(f) = \dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $S_1 = 1$.

3. On a $|T(f)| \leqslant \|f\|_\infty \times \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ donc T est continue sur $(E, \| \|_\infty)$ et $S_\infty \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$. Si on suppose $\varphi \geqslant 0$ alors, avec $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $T(f) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ donc $S_\infty = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

4. La continuité reste valable et $S_\infty \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$. Pour trouver une fonction de norme 1 telle que $|T(f)| = \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$, il faudrait prendre $f = \dfrac{\varphi}{|\varphi|}$ qui n'est pas continue (et même pas définie quand φ s'annule) donc on va « l'approcher » par $f_n(t) = \dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}$ qui est bien dans E. On a ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 1$ et on vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n) = \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}$ car $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t - T(f_n) = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}$. Si C est telle que $\forall f \in S_\infty(0,1), |T(f)| \leqslant C$ alors, comme $\dfrac{1}{\|f_n\|_\infty} f_n \in S_\infty(0,1)$, on a $\dfrac{1}{\|f_n\|_\infty}|T(f_n)| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne, quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant C$. On en déduit $S_\infty = \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** Si $N_1(P) = 0$ alors 0 est racine d'ordre $\geqslant n+1$ donc $P = 0$ et si $N_2(P) = 0$ alors P est nul sur $[-1, 1]$ donc admet une infinité de racines et $P = 0$; le reste est facile

2. $N_1(P') = N_1(P) - |P(0)| \leqslant N_1(P)$

3. $N_2(X^n) = 1$ alors que $N_2(nX^{n-1}) = n$ donc k n'existe pas.

Exercice 17 *[sujet]* u est linéaire.

1. On a $|u(f)(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ donc $\|u(f)\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ et u est continue sur $(E, \| \|_\infty)$. De plus $S_\infty = \sup\limits_{\|f\|_\infty=1} \|u(f)\|_\infty \leqslant 2$. Avec $f(x) = \cos(\pi x)$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f)(1) = -2$ donc $\|u(f)\|_\infty \geqslant 2$ ce qui donne $S_\infty = 2$.

2. Si u était continue sur $(E, \| \|_1)$, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\forall f \in E, \|u(f)\|_1 \leqslant C\|f\|_1$. Avec $f_n(t) = (1-t)^n$ $(n \geqslant 1)$, qui est dans E, on a $\|u(f_n)\|_1 = 1 - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui exclut l'existence de C.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ alors $\|p(x+ty)\|^2 = t^2\|y\|^2$ et $\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\|y\|^2$ donc $0 \leqslant \|x\|^2 + 2t(x|y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui impose $(x|y) = 0$ donc p est un projecteur orthogonal ; la réciproque est l'inégalité de Bessel.

2. Si (p_n) est une suite de projecteurs orthogonaux qui CV vers p alors $p_n \circ p_n = p_n$ donne, quand n tend vers $+\infty$, $p \circ p = p$ (car $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire donc continue) et $\|p_n(x)\| \leqslant \|x\|$ donne $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ donc p est aussi un projecteur orthogonal.
Si (e_i) est une bon de E et p un projecteur orthogonal alors $\|p(e_i)\| \leqslant 1$ puis si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, par C-Sch, on a $|a_{i,j}| = (p(e_j)|e_i) \leqslant 1$ donc $\|A\|_\infty \leqslant 1$

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $|\varphi(f)(x)| \leqslant f\|_\infty \times x \leqslant \|f\|_\infty$ et $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ pour $f = 1$.

2. On vérifie par récurrence que $\varphi^n(f)$ est $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$, $(\varphi^n(f))^{(k)}(0) = 0$ pour $k \leqslant n-1$ et $(\varphi^n(f))^{(n)} = f$ donc par formule de Taylor avec reste intégral, on a $\varphi^n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!}$ donc $\|\varphi^n(f)\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n!} f\|_\infty$ avec égalité pour $f = 1$.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Si φ est continue en 0 alors $(\varepsilon = 1)$ il existe $r > 0$ tel que $\|f\| \leqslant r \Rightarrow |\varphi(f)| < 1$. Si $f \neq 0$, on pose $g = \dfrac{r}{2\|f\|} f$ de sorte que $\|g\| = \dfrac{r}{2} < r$ donc $|\varphi(g)| \leqslant 1$ et par linéarité, $\varphi(g) = \dfrac{r}{2\|f\|}\varphi(f)$ donc on a $|\varphi(f)| \leqslant \dfrac{2}{r}\|f\|$ (qui reste valable pour $f = 0$) donc f est continue. Récip évidente

2. a) $|\varphi(f)| \leqslant \displaystyle\int_{-1}^0 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\|f\|_\infty$ donc $N \leqslant 2$. On aurait $\varphi(f) = 2$ pour la fct f valant 1 sur $[-1, 0]$ et -1 sur $]0, 1]$ mais elle n'est pas continue donc on va « l'approcher » : on pose $f_n(t) = -1$ sur $[-1, 0]$, $f_n(t) = -2nt + 1$ sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et $f_n(t) = 1$ si $t \geqslant \dfrac{1}{n}$ (dessinez là). On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\varphi(f_n) = 2 - \dfrac{1}{n}$ donc $N = 2$

b) Si $|\varphi(f)| = N$ et $\|f\|_\infty \leqslant 1$ alors les inégalités dans le calcul précédent sont toutes des égalités donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de signes opposés puis f est de signe fixe sur les deux intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$ et enfin, $|f|$ est constante sur ces deux intervalles ; on en déduit que $f = 0$ (car elle est continue sur $[-1,1]$). On aurait alors $\varphi(f) = 0$ qui est absurde. Une telle fonction dans E n'existe donc pas.

Exercice 21 *[sujet]* **1.** Linéarité facile et $id \times f$ est continue sur $[0,1]$ donc $\varphi(f) \in \mathcal{C}^1([0,1]) \subset E$.

2. $|\varphi(f)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ donc φ est continue pour la norme $\| \|_\infty$ et $k \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\varphi(f)(x) = \frac{x^2}{2}$ donc $\|\varphi(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$ et $k = \frac{1}{2}$

3. $|\varphi(f)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x \displaystyle\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$ donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ donc φ est aussi continue de $(E, \| \|_1)$ vers $(E, \| \|_\infty)$ et $k \leqslant 1$. Si on pose $f_n(t) = t^n$, on a $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\varphi(f_n)(x) = \dfrac{x^{n+2}}{n+2}$ donc $\|\varphi(f_n)\|_\infty = \dfrac{1}{n+2}$, on a donc $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{k}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $k = 1$