Endomorphismes d'un espace euclidien

La notation E désigne un espace euclidien ; le produit scalaire de E est noté $(\,|\,)$, la norme associée est notée $\|\ \|$.

Rappels :

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Pour $(x, y) \in E^2$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors
$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X$$
avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
- Si $(\,|\,)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors
$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (AX|Y) = X^T A^T Y = (X|A^T Y)$$
où on identifie un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice X dans la base canonique.

Exemple(s) :

(R.1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\ker(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ et $\mathrm{Im}(A)^\perp = \ker(A^T)$

(R.2) Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\ker(A) = \ker(A^T A)$ donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T A)$.

I Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1. Le groupe orthogonal

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou un *endomorphisme orthogonal*) si u conserve la norme, ie
$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Conséquence [I.1] :

1. Toute isométrie vectorielle est bijective.
2. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe orthogonal**.
$$\forall (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2, \quad u \circ v \in \mathcal{O}(E) \quad \text{et} \quad u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$$

Attention : $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par addition, ni par produit par un scalaire, donc $\mathcal{O}(E)$ n'est pas un espace vectoriel.

Remarque(s) :

(I.1) Cela signifie en particulier que toute isométrie vectorielle est un automorphisme de E, on peut donc indifféremment parler d'endomorphisme orthogonal ou d'automorphisme orthogonal.

(I.2) La réciproque est fausse : il existe des automorphismes de E qui ne sont pas des isométries vectorielles.

Propriété [I.2] : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalents :

i) u est une isométrie vectorielle.

ii) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

iii) u est bijectif et $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^{-1}(y))$.

iv) u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale de E.

Exemple(s) :

(I.3) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Montrer que φ est une isométrie si et seulement si $A^T A = I_n$.

(I.4) Étude des symétries orthogonales : on appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. On a donc les propriétés suivantes :

a) $s = 2\pi_F - id_E$, si π_F est la projection orthogonale sur E.

b) $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si $s^2 = id_E$ et $\ker(s - id_E) \perp \ker(s + id_E)$.

c) Si s est une symétrie (ie $s^2 = id_E$) alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est une isométrie vectorielle (ie $s \in \mathcal{O}(E)$).

d) On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. Si H est un hyperplan de E et $e \neq 0$ un vecteur normal à H alors la réflexion par rapport à H est $s_H : x \longmapsto x - 2\dfrac{(e|x)}{\|e\|^2}\, e$.

e) Si u et v sont deux vecteurs distincts non nuls de E et de même norme alors il existe une unique réflexion s_H telle que $s_H(u) = v$.

Attention : *Une projection orthogonale, autre que id_E, n'est pas une isométrie vectorielle.*

Propriété [I.3] : Soient u une isométrie vectorielle et F un sous-espace vectoriel de E.

F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Exemple(s) :

(I.5) Si u est une isométrie de E et e est un vecteur propre de u alors $H = \text{Vect}\{e\}^\perp$ est un hyperplan de E stable par u et l'endomorphisme induit par u sur H est une isométrie de H.

2. Matrices orthogonales

Définition : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est une **matrice orthogonale** si

$$M^T M = I_n$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété [I.4] : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) M est orthogonale.

ii) $MM^T = I_n$

iii) M est inversible et $M^{-1} = M^T$.

iv) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien.

v) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien.

Remarque(s) :

(I.6) M est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique. Cela signifie que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M^T M X = X^T X$.

Exemple(s) :

(I.7) Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Calculer son inverse à l'aide de $\dfrac{1}{3}P$.

Propriété [I.5] **:** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors on a :

$$u \in \mathcal{O}(E) \text{ si et seulement si } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Propriété [I.6] **:** Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors on a

1. $\det(M) = \pm 1$.
2. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (M,N) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2, \quad MN \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

3. $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \det(M) = +1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n.

$$\forall (M,N) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})^2, \quad MN \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M^{-1} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

Attention : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces vectoriels : ils ne sont stables ni par addition, ni par produit par un scalaire.

Conséquence [I.7] **:** Si u est une isométrie vectorielle de E alors $\det(u) = \pm 1$

Remarque(s) :

(I.8) L'ensemble $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \det(M) = -1\}$ n'est pas un sous-groupe et si $(M,N) \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})^2$ alors $MN \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(I.9) On définit de même pour les endomorphismes $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = +1\}$. C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe des isométries directes de E.
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in \mathcal{SO}(E)$ si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(I.10) La réciproque est fausse : il existe des endomorphismes dont le déterminant vaut 1 et qui ne sont pas des isométries.

Propriété [I.8] **:** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors on a $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$.

Remarque(s) :

(I.11) On a déjà vu que réciproquement, si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_n)$, la famille des vecteurs colonnes de P, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique.

Exemple(s) :

(I.12) Soit $M \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple de matrices (Q, R) tel que $M = QR$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R soit triangulaire supérieure.

II Espaces euclidiens de dimensions 2 ou 3

1. Orientation d'un espace vectoriel

Définition **[II.1]** **:**

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace euclidien E et $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On dit que les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si $\det(P) > 0$.
2. Un **espace eucliden orienté** est un espace euclidien E muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}_0$. La base $\mathcal{B}_0$ est alors appelée **base orthonormale directe**. Toute base de E ayant la même orientation que $\mathcal{B}_0$ est alors dite directe.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{B}$ est une **base directe** si $\mathcal{B}$ a la même orientation que la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$, ie si $\det P(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) > 0$.

Remarque(s) :

II.1 Si B est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

II.2 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est une isométrie directe de E si et seulement si u transforme une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E, de même orientation.

II.3 Si (i, j, k) est une base directe de $\mathbb{R}^3$ alors (j, k, i), (k, i, j) et $(-i, -j, k)$ sont aussi des bases directes alors que (j, i, k), (i, k, j), (k, j, i) et $(-i, j, k)$ sont des bases indirectes.

Définition : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et P un plan de E. Si e est un vecteur normal à P, le vecteur e oriente le plan P : on dit qu'une base (u, v) de P est directe si (u, v, e) est une base directe de E.

Remarque(s) :

II.4 Cette définition peut se généraliser à un espace euclidien orienté de dimension n : tout vecteur e non nul induit une orientation de l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}\{e\}^{\perp}$.

Définition **[II.2]** **:**

1. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et u, v, deux vecteurs de E. Le **produit mixte** de u et v est le réel, noté $[u, v]$, défini par
$$[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$
où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de E.
Le produit mixte $[u, v]$ est indépendant du choix de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E.
2. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u, v, w, trois vecteurs de E. Le **produit mixte** de u, v et w est le réel, noté $[u, v, w]$, défini par
$$[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$$
où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de E.
Le produit mixte $[u, v, w]$ est indépendant du choix de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E.

Remarque(s) :

II.5 On peut définir de même le produit mixte d'une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n.

II.6 (u, v, w) est une base de E, espace euclidien de dimension 3 orienté, si et seulement si $[u, v, w] \neq 0$.

II.7 Si (u, v, w) est une base orthormale directe de E alors $[u, v, w] = 1$ mais la réciproque est fausse.

Propriété **[II.3]** **:** Soient $n \in \{2, 3\}$ et E un espace euclidien orienté de dimension n. Le produit mixte de n vecteurs est une forme n-linéaire alternée sur E.

Remarque(s) :

(*II.8*) Pour $n = 3$, cela signifie que
— $u \mapsto [u, v, w]$, $v \mapsto [u, v, w]$ et $w \mapsto [u, v, w]$ sont trois formes linéaires.
— si u, v, w ne sont pas 2 à 2 distincts alors $[u, v, w] = 0$.

Propriété [II.4] : (Interprétation géométrique du produit mixte)

1. Soient $ABCD$ un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$. L'aire de $ABCD$ est $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
2. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathbb{R}^3$ et P le parallélépipède dont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois arrêtes. Le volume de P est $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

Définition [II.5] : Soient E un espace eucliden orienté de dimension 3, u et v deux vecteurs de E. Il existe un unique vecteur de E, appelé **produit vectoriel** de u et v, noté $u \wedge v$ tel que

$$\forall x \in E, [u, v, x] = (u \wedge v|\, x)$$

Remarque(s) :

(*II.9*) Cette définition se généralise en fait à $n-1$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ d'un espace euclidien orienté de dimension n : il existe un unique vecteur w tel que $\forall x \in E, \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_{n-1}, x) = (w|x)$ pour toute base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

Propriété [II.6] : Soient u et v deux vecteurs d'un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E. Si les coordonnées des vecteurs u et v sont $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ alors

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Propriété [II.7] : (Propriétés du produit vectoriel)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors on a les propriétés suivantes :

1. L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est une application bilinéaire antisymétrique de E : pour tout $(u, v, w) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha u + \beta v) \wedge w = \alpha(u \wedge w) + \beta(v \wedge w) \quad \text{et} \quad u \wedge (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \wedge v) + \beta(u \wedge w)$$

$$u \wedge v = -v \wedge u$$

2. On a $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont liés.
3. $u \wedge v$ est un vecteur orthogonal à u et à v.
4. $\|u \wedge v\| \leqslant \|u\| \times \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont orthogonaux.
5. Si u et v sont libres alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E.

Remarque(s) :

(*II.10*) Si u et v sont deux vecteurs de E unitaires et orthogonaux alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe de E.

(*II.11*) Plus précisément, si u et v sont orthonormés, $u \wedge v$ est l'unique vecteur de E permettant de compléter (u, v) en une base orthonormée directe.

Exemple(s) :

(*II.12*) Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w$; le produit vectoriel n'est donc pas associatif !

(*II.13*) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, tel que $\forall (u, v) \in E^2, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$; on pourra s'intéresser à l'image d'une base orthonormale de E.

(*II.14*) Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u \neq 0$. Déterminer les vecteurs x tels que $u \wedge x = v$.

2. Isométries vectorielles d'un plan euclidien orienté

Propriété **[II.8] :** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors on a $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$, ie

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \exists \theta \in \mathbb{R}, M = R(\theta) \text{ ou } M = S(\theta)$$

Propriété **[II.9] :** On a, pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

1. $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
   On en déduit $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ et $R(\theta)^n = R(n\theta)$ si $n \in \mathbb{Z}$.
2. $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$ donc $S(\theta)^2 = I_2$ et $S(\theta)^{-1} = S(\theta)$

Conséquence **[II.10] :** On a $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.

Définition : Soient E un plan euclidien orienté et $r \in \mathcal{L}(E)$. On dit que r est une **rotation de** E si $r \in \mathcal{SO}(E)$, ie si r est une isométrie vectorielle de E telle que $\det(r) = +1$.

$$\forall x \in E, \|r(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \det(r) = +1$$

Théorème **[II.11] :** Soient E un plan orienté et $r \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a équivalence de

i) r est une rotation de E

ii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

iii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Le réel θ est alors appelé **angle de la rotation** r.

Remarque(s) :

II.15 Cela signifie en particulier que la matrice d'une rotation est la même dans toutes les bases orthonormales directes de E.

Conséquence **[II.12] :** Si r et r' sont deux rotations d'angles θ et θ' alors $r \circ r'$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Définition **[II.13] :** Si u et v sont deux vecteurs de E non nuls, on définit l'angle orienté des vecteurs u et v comme étant l'angle de l'unique rotation r de E telle que $r\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right) = \dfrac{v}{\|v\|}$.

Théorème [II.14] **: (Classification des isométries d'un plan euclidien orienté)**
Soient E un plan euclidien orienté et $f \in \mathcal{O}(E)$.

1. si $\det(f) = +1$, f est une rotation.

2. si $\det(f) = -1$ alors f est une réflexion (une symétrie orthogonale par rapport à une droite).

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Propriété [II.15] **:** Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors f admet une valeur propre égale à ± 1.

$$1 \in \mathrm{Sp}(f) \quad \text{ou} \quad -1 \in \mathrm{Sp}(f)$$

Conséquence [II.16] **: (Réduction des isométries en base orthonormale)**
Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un réel θ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Attention : Si l'espace E est orienté, la base $\mathcal{B}$ n'est pas forcément directe.

Définition : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $r \in \mathcal{L}(E)$. On dit que r est une **rotation** de E si r est une isométrie de E telle que $\det(r) = +1$.

$$\forall x \in E, \|r(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \det(r) = +1$$

Théorème [II.17] **:** Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation de E. Alors il existe une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ orthonormale directe de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si $r \neq id_E$, la droite $D = \mathrm{Vect}\{u\} = \ker(r - id_E)$ est **l'axe de la rotation** et θ est **l'angle de la rotation**.
On dit que r est la rotation d'angle θ autour du vecteur u.

Conséquence [II.18] **:** Soit r la rotation d'angle θ autour d'un vecteur u. On a

1. $\mathrm{Tr}(r) = 1 + 2\cos\theta$.

2. Pour tout vecteur x de E, $\sin\theta$ est du même signe que $[u, x, r(x)]$

Attention : Penser à prendre une base orthonormée directe pour déterminer le signe de $\sin\theta$ (et respecter l'ordre des vecteurs dans le produit mixte).

Remarque(s) :

II.16 L'angle est orienté par le vecteur u : θ est l'angle de la rotation du plan $\mathrm{Vect}\{u\}^{\perp}$, orienté par le vecteur u.
La rotation autour de u et d'angle θ est aussi la rotation autour de $-u$ et d'angle $-\theta$.

II.17 Il existe en fait 3 types d'isométries dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :
- les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan) : on a alors $\det(s) = -1$ et la matrice de s est symétrique dans toute base orthonormale de E.
- les rotations : on a alors $\det(r) = +1$

— les symétries rotations : on a alors $\det(f) = -1$ mais la matrice de f dans une base orthonormale n'est pas symétrique. Il existe alors une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ orthonormale directe de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; f est alors la composée, commutative, de la rotation autour de u et d'angle θ et de la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}\{v, w\} = \mathrm{Vect}\{u\}^{\perp}$.

Exemple(s) :

(II.18) Déterminer la nature des endomorphismes canoniquement associé aux matrices $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$;

$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

(II.19) Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation autour du vecteur $u = (1, 1, 0)$ et d'angle θ.

(II.20) Soient u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ est r la rotation autour de u d'angle θ. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $r(x) = \cos\theta x + \sin\theta(u \wedge x) + 2(u|x)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)u$.

III Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

1. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** (ou *symétrique*) si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Propriété [III.1] : Soit p un projecteur de E ($p \circ p = p$). Alors

p est un projecteur orthogonal (ie $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si p est autoadjoint.

Exemple(s) :

(III.1) Si s est une symétrie de E alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s \in \mathcal{S}(E)$.

Propriété [III.2] : L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}(E), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha u + \beta v \in \mathcal{S}(E)$$

Attention : $\mathcal{S}(E)$ n'est par contre pas stable par composition.

Propriété [III.3] : Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace de E. Alors

F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u.

Exemple(s) :

(III.2) Si e est un vecteur propre de u, endomorphisme autoadjoint de E alors $H = \mathrm{Vect}\{e\}^{\perp}$ est un hyperplan de E, stable par u, sur lequel u induit un endomorphisme autoadjoint de H.

Propriété [III.4] : (Rappel)

1. L'ensemble des matrices symétriques réelles est défini par
$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = A^T\right\}$$
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Si $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = -A^T\right\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ supplémentaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors
$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$
3. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
4. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = a_{j,i}$

Remarque(s) :

III.3 $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = -a_{j,i}$, on a donc en particulier $a_{i,i} = 0$ donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

III.4 Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

III.5 Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Attention :

1. *$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par produit : si A et B sont symétriques alors AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.*
2. *Il existe des matrices symétriques non inversibles.*

Propriété [III.5] : Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors

u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique

Remarque(s) :

III.6 Un projecteur (resp. une symétrie) est un projecteur orthogonal (resp. une symétrie orthogonale) si et seulement si sa matrice, dans une base orthonormale, est symétrique.

Théorème [III.6] : (Théorème spectral)

1. **Version géométrique :** Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors
   - $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{R}$
   - $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$.
   - **Il existe** une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u, ie u est diagonalisable dans une base orthonormale.
2. **Version matricielle :** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, alors

   il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

Remarque(s) :

III.7 Ce théorème est en fait une équivalence : si $P^T AP$ est diagonale avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

III.8 Ce théorème assure que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et que l'on peut imposer que P soit orthogonale mais cela ne signifie pas que toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale est obligatoirement orthogonale ; il faut donc préciser que P est orthogonale lorsqu'on applique ce théorème.

(*III.9*) Ce théorème est utilisé en S2I pour diagonaliser, dans une base orthonormée, la matrice d'inertie.

(*III.10*) Il existe des matrices symétriques complexes qui ne sont pas diagonalisables : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple(s) :

(*III.11*) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

2. Endomorphismes autoadjoints positifs

Définition : Soit f un endomorphisme autoadjoint de E

1. On dit que f est **autoadjoint positif** si

$$\forall x \in E, (f(x)|x) \geqslant 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E.

2. On dit que f est **autoadjoint défini positif** si

$$\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow (f(x)|x) > 0$$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Remarque(s) :

(*III.12*) On a $\mathcal{S}^{++}(E) \subset \mathcal{S}^+(E) \subset \mathcal{S}(E)$

(*III.13*) $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ ne sont pas des espaces vectoriels car ils ne sont pas stables par produit par un scalaire ; ils ne sont pas stables non plus par composition.

(*III.14*) Si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ alors $(x, y) \longmapsto (f(x)|y)$ permet de définir un autre produit scalaire sur E.

Exemple(s) :

(*III.15*) Soient $a, b \in E$ euclidien et $f : x \longmapsto (a|x)a + (b|x)b$. Vérifier que $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

Propriété [III.7] : Soit f un endomorphismes autoadjoint de E. Alors on a les équivalences :

$$f \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$$

et

$$f \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

Remarque(s) :

(*III.16*) Si π_F est un projecteur orthogonal de E alors $\pi_F \in \mathcal{S}^+(E)$ donc $\forall x \in E, (\pi_F(x)|x) \geqslant 0$.
Par contre, si $\pi_F \neq id_E$ (ie $F \neq E$) $\pi_F \notin \mathcal{S}^{++}(E)$

(*III.17*) Si s est une symétrie orthogonale de E, $s \neq id_E$, alors $s \notin \mathcal{S}^+(E)$.

(*III.18*) $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{GL}(E)$ donc tout endomorphisme autoadjoint défini positif est bijectif.

<u>Définition</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ <u>symétrique</u>

1. On dit que A est **symétrique positive** si
$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T AX \geqslant 0$$
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On dit que A est **symétrique définie positive** si
$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Rightarrow X^T AX > 0$$
On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Attention</u> : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Propriété</u> [III.8] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E alors $f \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

<u>Conséquence</u> [III.9] : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = A^T$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = A^T$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

<u>Remarque(s) :</u>

III.19 $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc toute matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est inversible.

<u>Exemple(s) :</u>

III.20 On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ mais $A \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

III.21 Vérifier que :
a) Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^T AM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
b) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $M^T AM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

III.22 Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
Si de plus $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors on a $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.23 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a équivalence de :
i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$)
ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$) telle que $A = B^T B$.

III.24 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^T Q$ et $B = Q^T \Delta Q$, avec Δ diagonale.

III.25 Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique couple de matrices (O, S) tel que $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.26 Si A et B sont symétriques réelles telles que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\mathrm{Sp}(A+B) \subset \mathbb{R}^+$ (ce qui est faux pour des matrices non symétriques). L'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est donc stable par addition. On a aussi si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $A + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.27 Toute matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.