# TD20 : Applications dans les espaces vectoriels normés

---

**Exercice 1** **(Centrale MP 2011)**

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire $(A|B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.
2. On note $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ équidistantes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}\left(M^2\right) = 0\right\}$ *(*)*
3. E est-il fermé ? borné ? *(*)*
4. Déterminer les points intérieurs de $E$. *(*)*

**Exercice 2**

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires qui sont scindés dans $\mathbb{R}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire et de degré $d$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\,\mathrm{Im}(z)|^d$. *(*)*
   En déduire que $\mathcal{P}$ est fermé.
2. Soit $T_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est fermé. *(*)*
   b) On souhaite prouver $\overset{o}{T_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$.
      i. Montrer que si $A \in T_n(\mathbb{R})$ possède une valeur propre $\lambda$ telle que $m_\lambda(A) \geqslant 2$ alors il existe une suite $(A_k)$ qui converge vers $A$ telle que $A_k \notin T_n(\mathbb{R})$. *(*)*
      Que peut-on en conclure sur l'intérieur de $T_n(\mathbb{R})$ ?
      ii. Montrer que si $P$ est unitaire, degré $d$ et n'a pas de racine complexe dans $B(\lambda, \varepsilon)$ alors $|P(\lambda)| \geqslant \varepsilon^n$.
      iii. Montrer que l'ensemble des matrices réelles dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$ est ouvert et conclure. *(*)*

**Exercice 3** **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Soient $E$ un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls $a$ et $b$ de $E$. On pose $f(t) = \|a + tb\|$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. $f$ est-elle continue, lipschitzienne ?
2. Si elles existent, calculer $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t)$. *(*)*
3. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R}, a + bt \in B(0,1)\}$ est un intervalle ouvert ou vide. *(*)*

**Exercice 4** **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Soit $E$ un evn et $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Montrer que $f$ induit une bijection de $E$ sur $B(0,1)$. *(*)*
2. Montrer que $f$ est lipschitzienne, que $f^{-1}$ est continue mais non lipschitzienne. *(*)*

**Exercice 5**
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$ ?

$$f_1(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_3(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x \quad ; \quad f_4(x,y) = x^y$$

**Exercice 6** **(Mines-Ponts PSI 2016)**
Soit $H(x,y) = \dfrac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq 0$ et $H(0,0) = 0$. $H$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ? *(*)*

**Exercice 7** **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_\infty$. *(*)*
3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_1$ . *(*)*

**Exercice 8** **(Centrale PSI 2023)**
Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$. On pose $N = \sup\{|\varphi(f)|, f \in E, \|f\|_\infty \leqslant 1\}$

1. Justifier que $N$ existe si et seulement si $\varphi$ est continue.
2. Que vaut $N$ si $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ ? *(*)*
3. Existe-t-il $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $|\varphi(f)| = N$ ? *(*)*

**Indications**

**Exercice 1**

**2.** *Les distances sont atteintes aux projetés orthogonaux sur les deux espaces et on peut déterminer ces projetés orthogonaux à partir de la décomposition de $M$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.*

**3.** *Pour non borné, il suffit de trouver une matrice non nulle dans $E$ et d'utiliser l'homogénéité.*

**4.** *Il n'y en a pas, utiliser $A_p = A + \dfrac{1}{p} I_n$ en supposant $A$ intérieur à $E$.*

**Exercice 2**

**1.** *Factoriser $P$ dans $\mathbb{R}$ et décomposer $z = x + iy$*

**2.** *a)* *Montrer que $A \mapsto \mathcal{X}_A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

*b)* *i.* *Commencer par trouver une telle suite avec $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en modifiant le coefficient nul.*

*iii.* *Commencer par montrer que si $P$ est unitaire et SARS dans $\mathbb{R}$ et si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est unitaire et assez proche de $P$, alors $Q$ est SARS dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ en utilisant que les racines complexes de $Q$ sont 2 à 2 conjuguées.*

**Exercice 3**

**1.** *Utiliser $\|x - y\| \geqslant \Big| \|x\| - \|y\| \Big|$.*

**2.** *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles convexes de $\mathbb{R}$.*

**Exercice 4**

**1.** *Trouver $f^{-1}$ en résolvant $y = f(x)$ et en commençant par déterminer $\|x\|$ en fonction de $y$.*

**2.** *Vérifier que si $f^{-1}$ était lipschitzienne, elle serait bornée sur $B(0,1)$.*

**Exercice 6**

*Oui ; majorer différemment selon que $|y| \leqslant x^2$ ou $|y| \geqslant x^2$.*

**Exercice 7**

**2.** *Calculer $\varphi(1)$*

**3.** *Introduire $f_n : t \mapsto t^n$*

**Exercice 8**

**2.** *Majorer $|\varphi(f)|$ en fonction de $\|f\|_\infty$ pour prouver $N \leqslant 2$ puis introduire $f_n$ impaire, telle que $f_n = 1$ sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ et affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.*

**3.** *Chercher des conditions pour qu'une fonction $f$ rende toutes les majorations précédentes égales (et comprendre comment deviner la fonction $f_n$ précédente).*