I Variables aléatoires discrètes

1. Définition d'une variable aléatoire discrète et utilisation des notations $(X = x)$,...Composition par une application, loi d'une variable aléatoire discrète .
2. Couple de variables aléatoires discrètes , loi conjointe et lois marginales, loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$, variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (généralisation à n variables aléatoires discrètes indépendantes), lemme des coalitions.
3. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (nombre de succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes), géométrique (temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes) et de Poisson. Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
4. Espérance (existence si $\sum x_n P(X = x_n)$ est sommable), théorème de comparaison (si $|X| \leqslant Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors $E(X)$ est finie), espérance des lois usuelles, $E(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert, espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes et inégalité de Markov.
5. Variance et écart type, cas des lois usuelles, l'existence de la variance entraine celle de l'espérance, $V(aX + b) = a^2V(X)$, inégalité de Bienaymé-Tchebichev et loi faible des grands nombres. Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz et variance d'une somme de variables aléatoires discrètes .
6. Fonction génératrice, le rayon de convergence est $\geqslant 1$ et elle CVN sur $[-1, 1]$, fonctions génératrices des loi usuelles, fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires discrètes indépendantes, X admet une espérance (resp. une variance) si et seulement si G_X est dérivable (resp. deux fois dérivable) en 1, valeurs de $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

II Applications dans les espaces vectoriels normés

1. Topologie des espaces vectoriels normés : partie ouverte, fermée, cas des boules et des sphères, intersections et réunions, caractérisation séquentielle des parties fermées, points adhérents, points intérieurs, adhérence, intérieur et caractérisation séquentielle des points adhérents.
2. Applications continues
   a) Limite et continuité ponctuelle : définitions, caractérisation séquentielle de la limite et utilisation des fonctions coordonnées.
   b) Opérations sur les limites.
   c) Applications continues sur une partie, applications lipschitziennes. Images réciproques d'une partie ouverte/-fermée par une application continue. Toute application continue sur une partie fermée, bornée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes (*admis, le mot « compact » est hors-programme*). Continuité des applications linéaires. Toute application linéaire en dimension finie est lipschitzienne (*la notion de norme subordonnée est hors-programme*) ; toute application multilinéaire et toute application polynômiales sont continues, le déterminant est continu.

À suivre : les endomorphismes des espaces euclidiens