

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. \mathbb{K} désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices à coefficients dans \mathbb{K} ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{K}^n est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de \mathbb{K}^n qui lui est associé.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans \mathbb{K}^p , on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX .

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Sp } A$ l'ensemble des complexes λ pour lesquels il existe un vecteur X non nul de \mathbb{C}^n tel que $AX = \lambda X$:

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, AX = \lambda X\}$$

et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ (dont on admettra l'existence) défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp } A} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur \mathbb{C}^n par :

$$\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

Partie I

On considère la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
Si oui, caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $B = \lim A^n$.
4. Déterminer $\text{Sp}(A)$ et le réel $\rho(A)$.

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur \mathbb{C}^n . On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X).$$

On pourra s'intéresser à l'application $\theta : X \in \mathbb{C}^n \mapsto AX$

- b) Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans \mathbb{R} .

On notera dans la suite :

$$\tilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

3. Montrer :

- $\widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$.
- En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$.
- $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(A + B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.
- $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$.
- Déduire de ces résultats que \widetilde{N} est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n : N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.

b) Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de \mathbb{C}^n de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

5. En considérant un complexe λ de $\text{Sp}(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \widetilde{N}(A).$$

6. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$. On pourra commencer par montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A) \Rightarrow \lambda^k \in \text{Sp}(A^k)$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$.

- Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq [\widetilde{N}(A^k)]^{\frac{1}{k}}$.
- Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$.
- Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k).$$

d) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} [\widetilde{N}(A^k)]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B, A > B, A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0, A - B > 0, B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de \mathbb{R}^n positif ou strictement positif.

1. Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

2. A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.
- Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A^k \leq B^k$.
- Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N}_\infty(A) \leq \widetilde{N}_\infty(B)$.
- Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.
- Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.