

I Groupe orthogonal en dimension 3

Exercice 1 [Solution]

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la rotation autour de $u = (1, 2, 2)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 2 (ENSAM PSI 2010) [Solution]

Matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la rotation d'angle $\frac{\pi}{5}$ autour de $(1, -1, 1)$?

Exercice 3 (Mines-Ponts PC 2013) [Solution]

Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (ENSAM PSI 2011) [Solution]

Etudier f canoniquement associé à $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (CCP PSI 2016) [Solution]

Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (ENSAM PSI 2014) [Solution]

Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (ENTPE-EIVP PC 2010) [Solution]

Montrer que $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur orthogonal de \mathbb{R}^4 . Donner une base orthogonale de son noyau et de son image.

Exercice 8 (ENTPE-EIVP PSI 2013) [Solution]

Trouver a, b, c, d tels que $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation ; la caractériser dans ce cas.

Exercice 9 (Mines-Ponts MP 2007 et autres) [Solution]

Montrer que $A = \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation si et seulement si p, q et r sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + \lambda$.

Exercice 10 (Centrale PSI 2013) [Solution]

1. Montrer que si r est une rotation d'angle θ et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(1) = |P(e^{i\theta})| = 1$ alors $P(r)$ est une rotation.

2. Vérifier que $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation r_0 . Montrer que $\frac{1}{3}(2r_0^2 - r_0 + 2id)$ est une rotation et en déterminer l'angle.

Exercice 11 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$, $A \neq I_2$ et A inversible.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A .
2. Déterminer le spectre de A .
3. Montrer que $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
4. Calculer $\det(A)$.

5. Déterminer les matrices A .

Exercice 12 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^t A$. Montrer que $A = 0$, ou $A = I_2$ ou A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (Centrale PSI 2013) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, telle que $M^2 = {}^t M$

1. Montrer que M est orthogonale et que $\ker(M - I_n)^\perp$ est stable par M .
2. Déterminer les matrices M pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 14 (Centrale PSI 2013) [Solution]

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ euclidien canoniquement associé à A .

1. Donner les éléments géométriques de s .
2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déterminer les rotations r de \mathbb{R}^3 telles que $s \circ r = r \circ s$.
3. Même question en rajoutant $\text{Tr}(r) = 0$.

Exercice 15 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $r \neq id$ une rotation au tour de D et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P .

1. On suppose $D \perp P$, montrer que $r \circ s = s \circ r$
indication : écrire les matrices dans une bon bien choisie
2. On suppose $r \circ s = s \circ r$; que peut-on dire ?
indication : D est un espace propre de r qui est donc stable par s

Exercice 16 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non nul et $f : x \mapsto u \wedge x$.

1. Déterminer le noyau de f et calculer $f \circ f$ (on rappelle $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w$)
2. Donner la matrice de f dans la base canonique et calculer A^2 .
3. Calculer f^n en fonction de f , f^2 et $\alpha = \|u\|$. Calculer et étudier $\exp(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$.

II Groupe orthogonal et base orthonormale

Exercice 17 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{i,j} \right| \leq n \leq \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}$.

indication : calculer $(f(e_i)|e_j)$ pour f canoniquement associé à M et (e_i) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Exercice 18 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $a \in E$ non nul, E espace euclidien. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $u : x \mapsto \alpha \langle x|a \rangle a - x$ est une isométrie. Reconnaitre u pour ces valeurs.

Exercice 19 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, tel que $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (u(x)|u(y)) = 0$.

1. Montrer que les images des vecteurs d'une base orthonormée sont toutes de même norme (on la note μ).
2. Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \mu \|x\|$ et en déduire qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \mu g$.

Exercice 20 (ENTPE-EIVP PSI 2012) [Solution]

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux base orthonormées de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i)|e'_j)^2$ ne

dépend ni de \mathcal{B} , ni de \mathcal{B}' .

indication : commencer par identifier la somme sur j .

Exercice 21 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$, montrer que $f - id$ et $f + id$ sont bijectifs.

2. Montrer que $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$ est un automorphisme orthogonal qui n'admet pas -1 pour valeur propre.
3. Étudier la réciproque : si g est un automorphisme orthogonal qui n'admet pas -1 pour valeur propre, existe-t-il f tel que $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$ et $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$?
indication : on peut calculer g en fonction de f .

Exercice 22 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t C \\ C & I_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $M {}^t M$ et en déduire $M \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$
2. Soit $N = M^{-1} {}^t M$. Montrer que $N \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 23 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

Soit E un espace euclidien.

1. Soit f une isométrie de E telle que $f \circ f = -id$. Montrer que pour tout $u \in E$, u et $f(u)$ sont orthogonaux.
2. Déterminer les isométries de \mathbb{R}^2 telles que $f \circ f = -id$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie de \mathbb{R}^3 telle que $f \circ f = -id$.
indication : utiliser le déterminant
4. Soit f une isométrie telle que $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$. Montrer que $f \circ f = -id$.
indication : vérifier que si $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$ alors $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$

Exercice 24 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(2M + I_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(Mx|x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Que peut-on en déduire pour M ?
indication : montrer que $M + {}^t M = 2I_n$ puis qu'il existe A antisymétrique telle que $M = I_n + A$, puis $A^2 = 0$ et enfin $A = 0$.

Exercice 25 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A {}^t B$

1. Calculer $A {}^t B + B {}^t A$
2. En déduire un polynôme annulateur de C
3. Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\text{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires.
indication : Montrer qu'ils sont orthogonaux.
4. Montrer $A = B$

Exercice 26 (Mines-Ponts PC 2011) [Solution]

1. Montrer que toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $P = \Omega T$, où Ω est réelle orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (on pourra s'inspirer du procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Montrer que cette décomposition est unique.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2 \right)$.

Exercice 27 (CCP PSI 2017) [Solution]

1. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, calculer $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k\theta)$ et déterminer leurs limites.
2. Soit r une rotation d'angle θ de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ; déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r^k$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $E = \ker(u - id) \oplus \text{Im}(u - id)$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k$.

Exercice 28 (CCP PSI 2021) [Solution]

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\text{Im}(v)^\perp = \ker(v)$ où $v = u - id$.
2. Soit $a \in E$ et $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 29 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on note $K(f) = \ker(f - id)$ et $I(f) = \text{Im}(f - id)$. Si $u \in E$, $u \neq 0$, on note s_u la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}\{u\}^\perp$.

1. Montrer que F est stable par $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si F^\perp est stable par f .
2. Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que $E = K(f) \oplus I(f)$.
3. Soient (u_1, \dots, u_p) une famille libre de E et $f = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}$; montrer que $I(f) = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Exercice 30 [Solution]

Soit f un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

1. Montrer que $u = f + f^{-1}$ est symétrique et en déduire qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\text{Vect}\{x, f(x)\}$ est stable par f .
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2 de la forme $D_1 = (1)$, $D_1' = (-1)$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Exercice 31 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $Z = (z_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\bar{Z} = (\bar{z}_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit λ une valeur propre complexe de A ; montrer que $|\lambda| = 1$.
indication : calculer ${}^t\bar{Z}AZ$ et vérifier que c'est en fait un réel.
2. On suppose que A admet une valeur propre complexe non réelle. Montrer qu'il existe une famille libre $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ telle que $(AX, AY) \in F^2$ où $F = \text{Vect}\{X, Y\}$.
3. Écrire la matrice de u_F , endomorphisme induit par A sur F , dans une base orthonormale de F .
4. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ où $D = \text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_k))$ est diagonale par blocs, avec

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

III Espaces stables

Exercice 32 (ENSIIE-ENSEA PC 2010) [Solution]

Déterminer les droites stables par $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que si P est stable par A alors P^\perp est stable par tA et déterminer l'unique plan stable par A .

Exercice 33 (Centrale PC 2012) [Solution]

Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u laisse stable toutes les droites alors u est une homothétie.
2. Montrer que si u laisse stable tous les hyperplans de E alors ${}^tA = \lambda I_n$, où A est la matrice de u dans une base orthonormée, puis que u est une homothétie.
3. Montrer que si u laisse stable tous les sous-espaces de dimension $r \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ alors u est une homothétie.

IV Éléments propres de matrices symétriques

Exercice 34 (CCP PSI 2015) [Solution]

1. Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de vecteurs propres.

2. Donner une CNS sur (u_0, v_0, w_0) pour que les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) convergent :
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Exercice 35 (CCP MP 2009) [Solution]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; trouver P telle que PA^tP soit diagonale.

Exercice 36 (TPE-EIVP PSI 2018) [Solution]

Soient $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

- Déterminer les espaces propres de K .
- En déduire une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPM(a, b, c)P$ soit diagonale, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 37 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle et $B = AA^T$

- B est-elle diagonalisable ?
- Déterminer le rang de B
- Déterminer les éléments propres de B

Exercice 38 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique

- Montrer que les valeurs propres de A sont réelles ; indication : calculer ${}^t\bar{X}AX$
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = n \\ j & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Calculer $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$ et en déduire les valeurs propres de A

Exercice 39 (CCP PC 2009) [Solution]

Montrer que $B = {}^tAA$, avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est diagonalisable et que 0 est valeur propre de B . (que dire de l'ordre de multiplicité de 0 pour B ?)

Exercice 40 (ENTPE-EIVP PC 2007) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que si $M + {}^tM$ est nilpotente alors ${}^tM = -M$.

Exercice 41 (CCP PSI 2015) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A{}^tA = {}^tAA$

- Montrer que tAA est nilpotente
- Trouver A .

Exercice 42 (ENTPE-EIVP PC 2009) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p . Montrer que tAA est inversible.

Exercice 43 (CCP PSI 2010) [Solution]

Soit A carrée réelle et $B = A{}^tA - {}^tAA$. Montrer que si $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$ alors $B = 0$.
indication : calculer $\text{Tr}(B)$.

Exercice 44 (Telecom SudParis PC 2009) [Solution]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes ou non. Montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{(i,j)} a_{i,j}^2$.

Exercice 45 (Centrale MP 2010) [Solution]

Soit A matrice carrée réelle d'ordre n . Montrer que $\text{rg}(A)$ est exactement le nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec multiplicité) de tAA .

Exercice 46 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle ; montrer que $\frac{(\text{Tr } A)^2}{\text{Tr}(A^2)} \leq \text{rg}(A)$.

Exercice 47 (X/ENS PSI 2021) [Solution]

Soit X, Y des matrices symétriques réelles de même taille.

Montrer que $\text{Tr}(XYXY) \leq \text{Tr}(X^2Y^2)$; on s'intéresse d'abord au cas où l'une des matrices est diagonale.

Exercice 48 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soient E_1, \dots, E_n n parties 2 à 2 distinctes de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que toutes ces parties sont de cardinal c et que toutes les intersections de 2 de ces parties ont un cardinal égal à d .

On définit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- a) Calculer tBB et l'exprimer en fonction de I_n et $J_n = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$.

- b) Montrer que tBB est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
 c) En déduire que B est inversible.
2. On suppose $BJ_n = J_nB$ dans la suite de l'exercice. Quelle est la signification de cette hypothèse?
 3. En partant de tBBJ_n , trouver une relation entre n , c et d .
indication : calculer $\|BJ_n\|^2$

Exercice 49 (IMT PSI 2019) [Solution]

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$ unitaire et $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrer que $f : x \mapsto x + k(x|a)a$ est symétrique. Montrer que f est un automorphisme de E . Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 50 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Montrer que $P \mapsto (X - \alpha)P'$ est un endomorphisme symétrique de E .

Exercice 51 (Mines-Ponts PC 2006) [Solution]

Dans $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, montrer que T défini par $T(f) = u'f' + uf''$, avec $u \in E$, $u(0) = u(1) = 0$ est un endomorphisme symétrique.

Exercice 52 [Solution]

Soit f endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n euclidien, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 \|x\|^2 \leq (f(x)|x) \leq \lambda_n \|x\|^2$. (*Telecom SudParis PSI 2015*)
2. Montrer que si $x \neq 0$ vérifie $(f(x)|x) = \lambda_n \|x\|^2$ alors x est un vecteur propre de f .
3. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (f(e_i)|e_i) = \lambda_i$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de vecteurs propres.

Exercice 53 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, R_A(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle}$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k . On note (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Ae_i = \lambda_i(A)e_i$.

1. Montrer que : $\forall X \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \setminus \{0\}, R_A(X) \in [\lambda_1(A), \lambda_k(A)]$
2. Montrer que : $\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k} \left(\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \right)$
3. Soient A et B deux matrices symétriques réelles. En déduire que $\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B)$.

Exercice 54 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soient E un espace euclidien, u_1, \dots, u_n des endomorphismes symétriques de E tels que $\sum_{k=1}^n \text{rg}(u_k) = \dim(E)$ et $\forall x \in$

$$E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (u_k(x)|x)$$

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k - id$ est diagonalisable.
2. En déduire $\sum_{k=1}^n u_k = id$.

indication : montrer que $\text{Sp} \left(\sum_{k=1}^n u_k - id \right) = \{0\}$

3. Montrer que $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq n}^\perp \text{Im}(u_k)$ et que les u_k sont des projecteurs orthogonaux tels que $u_i \circ u_j = 0$ si $i \neq j$.

indication : commencer par la somme directe, puis projecteurs tels que $u_i \circ u_j = 0$ et finir par l'orthogonalité des images.

Exercice 55 (ENSAM PSI 2010) [Solution]

On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique.

1. Que dire des valeurs propres de $B = {}^tAA$, où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$?

2. On suppose que (X_1, \dots, X_n) et (AX_1, \dots, AX_n) sont deux bases orthonormales de \mathbb{R}^n . Montrer que X_1, \dots, X_n sont des vecteurs propres de B .

Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E tel que $\text{Tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ n'ait que des coefficients nuls sur la diagonale.

indication : raisonner par récurrence sur n et commencer par trouver (en utilisant une base de vecteurs propres) un vecteur tel que $u(e) \perp e$.

Exercice 57 (ENTPE-EIVP PSI 2012) [Solution]

Soient S une matrice symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de S . On suppose S et D semblables. En calculant $\text{Tr}(S^2)$ de deux façons, montrer que $S = D$.

Exercice 58 (Mines-Ponts MP 2011) [Solution]

Montrer que pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$, l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$ est un endomorphisme symétrique. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 59 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soient E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux

1. Montrer que p est symétrique
2. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
3. Montrer que $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp = \ker(p) \cap \text{Im}(q)$
4. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable et $\text{Sp}(p \circ q) \subset [0, 1]$

indication : commencer par vérifier que $p \circ q \circ p$ induit un endomorphisme DZ sur $\text{Im}(p)$ puis compléter une base de vecteurs propres de cet endomorphisme induit par des bases de $\ker(q)$ et $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp$. Vérifier $\text{Sp}(p \circ q \circ p) \subset [0, 1]$

V Matrices symétriques positives

Exercice 60 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$
2. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$
3. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ est une norme sur \mathbb{R}^n

Exercice 61 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit A symétrique réelle définie positive ($\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$)

1. Montrer que pour $r > 0$, $A + rI_n$ est aussi symétrique définie positive.
2. Montrer que $B = (A - rI_n)(A + rI_n)^{-1}$ est symétrique et que $\text{Sp}(B) \subset]-1, 1[$.

Exercice 62 (TPE-EIVP PSI 2018) [Solution]

Sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(X|Y) = {}^t X Y$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t M = M^p$, avec $p \geq 2$; on pose $N = M^{p+1}$.

1. Montrer que $(NX|X) = \|MX\|^2$ pour $X \in E$.
2. Montrer que $N^p = N$; que peut-on en déduire pour les valeurs propres de N ?
3. Établir $N^2 = N$.
4. Montrer que $\ker(M) = \ker(N)$ et $\text{Im}(M) = \text{Im}(N)$.

Exercice 63 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geq 0$ et $(VX|X) \geq 0$, ($|$) désignant le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . Montrer que $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 64 (Mines-Ponts PSI 2008) [Solution]

1. Montrer que si u est un endomorphisme symétrique, ses valeurs propres sont toutes positives si et seulement si $\forall x, (u(x)|x) \geq 0$. On dit alors que u est positif.
2. Soit u et v deux endomorphismes symétriques positifs avec u inversible, montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ sont toutes positives.
indication : si U est inversible, écrire $U = S^2$ et vérifier UV et SVS sont semblables.

Exercice 65 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique; on suppose $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $\text{Sp}(R) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $B = R^2$.
2. En déduire que AB est diagonalisable.
indication : vérifier que AB est semblable à RAR
3. Montrer que si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 66 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit \mathcal{E} l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\text{Tr}(AA^T) > 0$
2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$
3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\text{Tr}(SS') > 0$

Exercice 67 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Montrer que M symétrique réelle d'ordre n , de coefficients $m_{i,j}$ est définie positive si et seulement si il existe un produit scalaire ϕ tel que $m_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

Exercice 68 (CCP PSI 2013) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, symétrique de valeurs propres positives.

1. Montrer que si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E alors $\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n (f(e_i)|e_i)$.
2. Soit g un autre endomorphisme symétrique ayant des valeurs propres positives; montrer que $\text{Tr}(g \circ f) \geq 0$.

Exercice 69 (CCP PSI 2015) [Solution]

1. Soit A antisymétrique réelle, montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (AX|X) = 0$.
2. Soit B symétrique réelle de valeurs propres strictement positives, montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 70 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E , espace euclidien.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
indication : un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset [0, 2]$ puis déterminer $\ker(u)$ et $\ker(u - 2id)$.

Exercice 71 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Dans E euclidien, on note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives

1. Montrer que si $f \in \mathcal{S}^+(E)$ alors $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ et qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = h^2$.
2. Soit $g \in \mathcal{S}^+(E)$; montrer que $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Exercice 72 (CCP PSI 2009) [Solution]

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E euclidien et f défini par $f(x) = \sum_{k=1}^n (e_k|x)e_k$.

1. Montrer que f est linéaire, symétrique à valeurs propres strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $g^2 = f^{-1}$.

Exercice 73 (CCP PSI 2011) [Solution]

Soient A et B symétriques réelles positives. Montrer que $\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$.

indication : penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et montrer que $\text{Tr}(A^2) \leq (\text{Tr}(A))^2$.

Exercice 74 (CCP PSI 2013) [Solution]

Pour $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et A symétrique réelle positive d'ordre n , montrer que $|\text{Tr}(AU)| \leq \text{Tr}(A)$.

Exercice 75 (ENSAM PSI 2014) [Solution]

1. Soient A et B symétriques telles que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que $\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$.
indication : inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \mapsto (\text{Tr}({}^t M M))^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|MN\| \leq \|M\| \times \|N\|$.

Exercice 76 (Mines-Ponts MP 2006) [Solution]

Soit A une matrice réelle et inversible. Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique définie positive (${}^t X A X > 0$ si $X \neq 0$) telle que $A = OS$.

indication : raisonner par condition nécessaire pour trouver S .

Exercice 77 (Centrale PSI 2019) [Solution]

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction de E euclidien si $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$

1. Montrer que $f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une contraction si et seulement si $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que, si $f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in E, \|P(f)(x)\| \leq \sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |P(\lambda)| \|x\|$
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe S symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$ puis en déduire une condition sur $\text{Sp}({}^tMM)$ pour que M soit une contraction.

VI Équations matricielles

Exercice 78 (CCP PSI 2016) [Solution]

Trouver A , symétrique réelle telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.

Exercice 79 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = {}^tA$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A .
2. On suppose que $0 \in \text{Sp}(A)$. Déterminer $\text{Sp}(A)$ et montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 80 (CCP PSI 2013) [Solution]

Soit A symétrique réelle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 81 (CCP PSI 2017) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = M {}^tM$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

1. Montrer que tMM est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de tMM , en déduire son spectre, puis que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.
3. Trouver M .

Exercice 82 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$ et $MM^T = M^T M$

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable puis déterminer $M^T M$
2. Déterminer M si $n = 3$.

Exercice 83 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$ et $MM^T = M^T M$. On pose $\Omega = M^T M$

1. Calculer M^4 et Ω^4
2. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. On suppose $\text{Tr}(M) = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ avec $n = 2p$.

indication : Pour trouver P , commencer par montrer que M est à la fois orthogonale et antisymétrique.

Exercice 84 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4.
2. Montrer que $M - I_n$ est inversible.
3. Trouver M

Exercice 85 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.
2. En déduire que M est symétrique.
3. Conclure que $M = I_n$.

Exercice 86 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soient A et B symétriques réelles telles que $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

indication : diagonaliser A et polynômes de Lagrange.

Exercice 87 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soient A et B symétriques réelles pour lesquelles il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.

indication : s'inspirer de l'exercice fait en cours (unicité de B symétrique positive telle que $A = B^2$) pour montrer que A et B sont diagonalisables dans une même base. Si $A^2 = B^2$, a-t-on $A = B$?

VII Matrices antisymétriques

Exercice 88 (CCP PC 2012) [Solution]

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est dans \mathbb{R}^+ et que ses valeurs propres sont dans $i\mathbb{R}$.

Exercice 89 (Centrale PSI 2015) [Solution]

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice antisymétrique réelle A telle que $A^2 = \lambda I_n$.
2. Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe A , antisymétrique réelle telle que $A^2 = \lambda I_n$.
3. Soit $\lambda < 0$ et A antisymétrique réelle telle que $A^2 = \lambda I_n$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 90 (Mines-Ponts PC 2013) [Solution]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que tAA a toutes ses valeurs propres positives et que $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tU = -U$. U est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
indication : U^2 est diagonalisable puis utiliser un polynôme annulateur

VIII Espaces normés euclidiens

Exercice 91 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

\mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $N(A) = \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N(A) = \max \text{Sp}({}^tAA)$

Exercice 92 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrice A , symétriques réelles, telles que $\text{Sp}(A) \subset I$, où I est un intervalle de \mathbb{R} .

1. Montrer que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \left(\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \right) \times {}^tXX \leq {}^tXAX$.
2. Montrer que $S_n(I)$ est convexe (ie si $(A, B) \in S_n(I)^2$ alors $\forall t \in [0, 1], tA + (1-t)B \in S_n(I)$).

Exercice 93 (EIVP PSI 2016) [Solution]

Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Comparer $\sup_{\|x\|=1} \|\phi(x)\|$ et $\sup_{\|x\|=1} |\langle \phi(x)|x \rangle|$.

Solutions

Exercice 1 [sujet] Si $u_1 = \frac{1}{3}u$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ et $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1)$ alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Si $P = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) {}^t P$

Exercice 2 [sujet] Si $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$ alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi/5 & -\sin \pi/5 \\ 0 & \sin \pi/5 & \cos \pi/5 \end{pmatrix}$. Si $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) {}^t P$

Exercice 3 [sujet] Symétrie orthogonale par rapport à $\ker(A - I_3) = \{(x, y, z) | 3x - 2y + z = 0\}$

Exercice 4 [sujet] Rotation autour de $(1, 1, 0)$ d'angle $-\frac{\pi}{3}$

Exercice 5 [sujet] A est orthogonale, $\det(A) = +1$ donc rotation d'axe $u = (3, 1, -1)$; $\text{Tr}(A) = 1 + 2 \cos(\theta) = -\frac{2}{3}$ donc $\cos \theta = -\frac{5}{6}$ et $[u, e_1, r(e_1)] > 0$ donc $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$.

Exercice 6 [sujet] Rotation autour de $(2, -1, 2)$ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 [sujet] On vérifie $M^2 = M$ et ${}^t M = M$ donc M est la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Im}(M) = \ker(M - I_4) = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1) \right\}$ puis $\ker(M) = \text{Im}(M)^\perp = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1) \right\}$

Exercice 8 [sujet] $C_2 \perp C_1$ si et seulement si $c = -2$ puis pour cette valeur A est une matrice de rotation si et seulement si $C_3 = C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Pour ces valeurs, A est la matrice de la rotation autour de $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $-\arccos\left(\frac{11}{14}\right)$

Exercice 9 [sujet] $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si (C_1, C_2, C_3) bon et $\det(A) = 1$ donc si et seulement si $(S) \begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ pr + qp + rq = 0 \\ p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 0 \end{cases}$

De plus p, q, r sont racines de $P = (X - p)(X - q)(X - r) = X^3 - (p + q + r)X^2 + (pq + rq + rp)X - pqr$. Comme $p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr)$ et, avec $P(p) = 0$, $p^3 = (p + q + r)p^2 - (pq + pr + qr)p + pqr$ (idem pour q et r), on a $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p + q + r)(p^2 + q^2 + r^2) - (pq + pr + qr)(p + q + r)$ donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} pr + pq + rq = 0 \\ p + q + r = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P = X^3 - X^2 - pqr$.

Exercice 10 [sujet] 1. Comme P est réel, on a $P(e^{i\theta}) = e^{i\phi}$ et $P(e^{-i\theta}) = e^{-i\phi}$; on vérifie alors que si $R(\theta)$ est une matrice de rotation de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ alors $P(R(\theta)) = R(\phi)$ (car les valeurs propres de $R(\theta)$ sont $e^{\pm i\theta}$); on a alors

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & 0 \\ 0 & R(\phi) \end{pmatrix} \text{ donc est bien une rotation.}$$

2. R_0 est orthogonale et $\det(R_0) = 1$; r_0 est la rotation autour de $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$. On a bien $P(1) = 1$ et $P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $P(r_0)$ est la rotation autour de u et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 11 [sujet] 1. $A^4 = (A^T)^2 = (A^2)^T = A$ donc $P = X(X - 1)(X^2 + X + 1)$ annule A

2. A est inversible donc $0 \notin \text{Sp}(A)$. Comme $\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq 2$, si $1 \in \text{Sp}(A)$ alors $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et comme P est SARS dans \mathbb{C} , A est DZ dans \mathbb{C} donc A serait semblable à I_2 donc $A = I_2$, ce qui est absurde. Comme A est réelle, il ne reste plus qu'une solution : $\text{Sp}(A) = \{j, j^2\}$

3. A est inversible donc $A^4 = A \Rightarrow A^3 = I_2$ donc $AA^T = A^3 = I_2$

4. $\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(A^T) = \det(A)$ et $\det(A) \neq 0$ donc $\det(A) = +1$

5. A est une rotation : $A = R(\theta)$ est alors solution si et seulement si $A^2 = R(2\theta) = A^T = A^{-1} = R(-\theta)$ donc $R(3\theta) = 0$ puis $\theta = \frac{2k\pi}{3}$. Si $k \in 3\mathbb{Z}$ alors $A = R(0) = I_2$ qui est absurde. Reste deux solutions $A = \pm R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (qui sont bien des solutions).

Exercice 12 [sujet] $A^4 = {}^t A^2 = A$ donc $X(X-1)(X^2+X+1)$ annule A est SARS dans \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 1, j, j^2\}$. Si $\text{Sp}(A) = \{0\}$ alors A est DZ donc semblable à 0 donc $A = 0$; si $\text{Sp}(A) = \{1\}$, on a de même $A = I_2$; si $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ alors $\mathcal{X}_A = X(X-1)$ donc $A^2 = A = {}^t A$, A est symétrique réelle donc DZ dans une bon et semblable à $E_{1,1}$. Enfin si $\text{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ (comme A est réelle, il n'y pas d'autre possibilité) alors $\mathcal{X}_A = X^2+X+1$ donc $A^{-1} = -A - I_2 = A^2 = {}^t A$, A est orthogonale, $\det(A) = j \times j^2 = 1$ donc A est une rotation $R(\theta)$ telle que $R(3\theta) = I_2$ et $R(\theta) \neq I_2$. Il y a deux solutions $R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $R\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ qui sont orthogonalement semblables entre elles (inverser les vecteurs de base pour garder une bon, mais plus directe).

Exercice 13 [sujet] 1. On a $M^4 = M$ et comme M est inversible, $M^3 = I_n$, ce qui donne bien ${}^t M = M^{-1}$ donc M est orthogonale. Si $X \in \ker(M - I_n)^\perp$ et $Y \in \ker(M - I_n)$ alors $(MX|Y) = (MX|MY) = (X|Y) = 0$.

2. On a $M^3 = I_n$ donc $\det(M) = +1$, M est une rotation. Pour $n = 2$, si $M = R(\theta)$ alors $M^2 = {}^t M$ si et seulement si $3\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$; on a donc trois solutions $I_2, R\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$.

Pour $n = 3$, M est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ et on vérifie que M est solution si et seulement si $R(\theta)$ est une des trois solutions pour $n = 2$; réciproquement, toute matrice orthogonalement semblable à une de ces trois matrices est bien solution.

Exercice 14 [sujet] 1. A est orthogonale et symétrique, $\det(A) < 0$ donc s est la réflexion par rapport à $P = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}^\perp$

2. Si s et r commutent alors $D = E_{-1}(s) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ est une droite stable par r . Si $\theta \neq \pi$, la seule droite stable par une rotation est l'axe donc r est une rotation d'axe $u = (1, 1, 1)$ (qui sont bien solutions). Si $\theta = \pi$, r est un demi-tour (ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite); r est donc une rotation autour de u , ou un demi-tour autour d'une droite orthogonale à u (qui sont bien solutions à nouveau).

3. $\text{Tr}(r) = 0$ donc r est une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ donc r est une rotation autour de u ; les deux rotations sont bien solutions

Exercice 15 [sujet] 1. Si $D = \text{Vect } u$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une bond, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) =$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ qui commutent.

2. $D = \text{Vect } u$ est une droite stable par s donc elle est engendré par un vecteur propre de s . On a donc deux possibilité : soit $u \in E_{-1}(s)$ est on est ramené à la question précédente, soit $u \in E_1(u)$ et on peut compléter en une bond \mathcal{B}

telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui ne commutent que si $\sin \theta = 0$ donc si r est un demi-tour.

Exercice 16 [sujet] 1. $\ker(f) = \text{Vect}\{u\}$ et $f \circ f = (u|x)u - \|u\|^2 x$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \dots$

3. On a $f^3 = -\alpha^2 f$ donc $f^{2n} = (-\alpha^2)^{n-1} f^2$ pour $n \geq 1$ et $f^{2n+1} = (-\alpha^2)^n f$ pour $n \geq 0$.

Si on pose $e_1 = \frac{1}{\alpha} u$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une bond, on vérifie que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ puis que $\exp(f)$ est la rotation autour de u et d'angle α .

Exercice 17 [sujet] $m_{i,j} = (e_i|f(e_j))$ donc $\left| \sum_{i,j} m_{i,j} \right| = |(f(u)|u)|$ si $u = e_1 + \dots + e_n$, on en déduit par C-Sch, $|(f(u)|u)| \leq \|f(u)\| \|u\| = \|u\|^2 = n$.

$\sum_i m_{i,j}^2 = 1$ donc $|m_{i,j}| \leq 1$ et $n = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \leq \sum_{i,j} |m_{i,j}| \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} 1^2 \right)^{1/2} = n^{3/2}$

Exercice 18 [sujet] $\|u(x)\|^2 = \alpha^2 < x, a >^2 \|a\|^2 + \|x\|^2 - 2\alpha < x, a >^2$ donc $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \|a\|^{-2}$

Si $\alpha = 0$, $u = -id$ et si $\alpha = \|a\|^{-2}$ alors (vérifier que u est symétrique) u est la réflexion par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}\{u\}^\perp$

Exercice 19 [sujet] 1. Si $\|e_i\| = \|e_j\|$ alors $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ donc $u(e_i) + u(e_j) \perp u(e_i) - u(e_j)$ ce qui donne $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = (u(e_i) + u(e_j)|u(e_i) - u(e_j)) = 0$
 2. On écrit $x = \sum x_i e_i$ avec (e_i) bon et on a $u(x) = \sum x_i u(e_i)$ et par Pythagore, $\|u(x)\|^2 = \sum x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = \mu \|x\|^2$.
 Si $\mu = 0$, $g = id$ convient ; sinon on pose $g = \frac{1}{\mu}u$ et on vient de vérifier que $g \in \mathcal{O}(E)$

Exercice 20 [sujet] $\sum_{j=1}^n (u(e_i)|e'_j)^2 = \|u(e_i)\|^2$ car (e'_j) est une bon ; puis $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2$. Si on note $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans (e_i) alors $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \text{Tr}({}^tAA)$; si on remplace \mathcal{B} par une autre bon \mathcal{B}'' alors $P = P(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = PA''{}^tP$ donc $\text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(P{}^tA''A''P) = \text{Tr}({}^tA''A'')$ ne dépend pas de la bon (e_i)

Exercice 21 [sujet] 1. Si $f(x) = \pm x$ alors $\pm \|x\|^2 = 0$
 2. On pose $y = (id - f)^{-1}(x)$ et on a $\|g(x)\|^2 = \|y + f(y)\|^2 = \|y\|^2 + \|f(y)\|^2$ (Pythagore) et $x = y - f(y)$ donc on vérifie aussi $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|f(y)\|^2$.
 Si $g(x) = -x$ alors $y + f(y) = -y + f(y)$ donc $y = 0$ et $x = 0$
 3. On pose $g = (id + g)^{-1} \circ (g - id) = (g - id) \circ (id + g)^{-1}$ (car $id + g$ et $id - g$ commutent) et on a, avec $y = (id + g)^{-1}(x)$, $(f(x)|x) = (g(y) - y|y + g(y)) = 0$ car g est orthogonal

Exercice 22 [sujet] 1. $M{}^tM = \begin{pmatrix} 1 + {}^tCC & 0 \\ 0 & I_n + C{}^tC \end{pmatrix}$ puis $1 + {}^tCC = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$ et $\det(I_n + C{}^tC) = (-1)^n \mathcal{X}_{C{}^tC}(-1)$. ${}^tXC{}^tCX = \|{}^tCX\|^2 \geq 0$ donc $-1 \notin \text{Sp}(C{}^tC)$ et $\det(I_n + C{}^tC) \neq 0$.
 2. ${}^tNN = M{}^tM^{-1}M^{-1}{}^tM$; on vérifie ${}^tMM = M{}^tM$ ce qui donne ${}^tMM^{-1} = M^{-1}{}^tM$.

Exercice 23 [sujet] 1. $(f(u)|u) \stackrel{\mathcal{O}(E)}{=} (f^2(u)|f(u)) = -(f(u)|u)$
 2. Seules $R(\pm\pi/2)$ conviennent
 3. On aurait $\det(f)^2 = (-1)^3 = -1$
 4. $(f(x + y)|x + y) = 0$ donne $(f(x)|y) = -(y|f(x))$ en développant ; la matrice de f , dans une bon, est donc antisymétrique et orthogonale : ${}^tA = -A = A^{-1}$ donc $A^2 = -I_n$

Exercice 24 [sujet] 1. on a $9\|x\|^2 = \|2Mx + x\|^2 = 4\|Mx\|^2 + 4(Mx|x) + \|x\|^2 \stackrel{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} 4(Mx|x) + 5\|x\|^2$
 2. On peut en déduire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{1\}$ car si $Mx = \lambda x$ avec $x \neq 0$ alors $\|x\|^2 = (Mx|x) = \lambda\|x\|^2$ mais on peut faire plus précis. On a ${}^tMM = I_n$ et $(2M + I_n)(2{}^tM + I_n) = 9I_n$ donc $M + {}^tM = 2I_n$. On pose $A = M - I_n$ et on a ${}^tA + A = 0$ donc M s'écrit $M = I_n + A$ avec ${}^tA = -A$. Comme ${}^tMM = I_n$, on a $A^2 = 0$ puis $\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = -{}^tXA^2X = 0$ donc $A = 0$ et $M = I_n$.

Exercice 25 [sujet] 1. $MM{}^t = I_n$ donne $A{}^tB + B{}^tA = 2I_n$
 2. on a $C + C{}^t = 2I_n$ et $CC{}^t = I_n$ (C est aussi orthogonale) donc $C^2 + I_n = 2C$
 3. si $X \in \ker(C - I_n)$ et $Z = CY - Y \in \text{Im}(C - I_n)$ alors $CX = X$ donc $(X|Z) = (X|CY - Y) = (CX|CY) - (X|Y) = 0$
 4. $(C - I_n)^2 = 0$ donne $\text{Im}(C - I_n) \subset \ker(C - I_n)$ donc $\{0\} = \text{Im}(C - I_n) \cap \ker(C - I_n) = \text{Im}(C - I_n)$ donc $C = I_n$ et $A = B$

Exercice 26 [sujet] 1. Existence cf cours ; si $P = \Omega T = \Omega' T'$ alors $M = (\Omega')^{-1}\Omega = T' T^{-1}$ est orthogonale et triangulaire supérieure ; on en déduit $M = I_n$ car M^{-1} est aussi triangulaire supérieure et $M^{-1} = {}^tM$ est triangulaire inférieure donc M est diagonale, puis $\|C_j\| = 1$ donne $\lambda_i = \pm 1$ donc $\lambda_i = 1$ car les coefficients diagonaux sont (comme ceux de T et T') positifs.

2. Si A n'est pas inversible, $\det(A) = 0$ donc l'inégalité est évidente. Si A est inversible, on écrit $A = \Omega T$ et on a $\det(A)^2 = \det(T)^2 = \prod_{i=1}^n t_{i,i}^2$ et (avec $\Omega^{-1} = (p_{i,j})$) $t_{i,i}^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} p_{j,i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n p_{j,i}^2$ et enfin $\sum_{j=1}^n p_{j,i}^2 = 1$ car Ω^{-1} est orthogonale.

Exercice 27 [sujet] 1. $S_n + iT_n = \frac{1}{n} \frac{e^{i(n-1)\theta/2} \sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ donc $\lim S_n = \lim T_n = 0$

2. En dimension 2, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\theta)^k = \begin{pmatrix} S_n & -T_n \\ T_n & S_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; en dimension 3, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\theta)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_n & -T_n \\ 0 & T_n & S_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Si $x \in \ker(u - id)$ alors $(x|(u - id)(y)) = (x|u(y) - y) = (x|y) - (u(x)|u(y))$ car $u(x) = x$. On a $\text{Im}(u - id) \perp \ker(u - id)$ et on obtient l'égalité avec les dimensions. On écrit $x = a + (b - u(b))$, puis $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k(x) = a + \frac{1}{n}(u(b) - u^{n+1}(b))$ et on vérifie $\frac{1}{n}(u(b) - u^{n+1}(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\|u^{n+1}(b)\| = \|b\|$ (suite bornée). La suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k\right)$ converge donc vers la projection orthogonale sur $\ker(u - id)$.

Exercice 28 [sujet] 1. si $a \in \ker(v)$ alors $(a|v(v)) = (a|u(b) - b) \stackrel{u(a)=a}{=} (u(a)|u(b)) - (a|b) = 0$ car u orthogonal ; on trouve l'égalité par le théorème du rang

2. On écrit $a = a_0 + u(b) - b$ et on trouve $x_n = a_0 + \frac{1}{n}(u^{n+1}b - b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\|u^{n+1}(b)\| = \|b\|$ (donc borné)

Exercice 29 [sujet] 1. cours

2. Si $x \in \ker(f - id)$ alors $(x|(f - id)(y)) = (x|f(y) - y) = (x|y) - (f(x)|f(y))$ car $f(x) = x$. On a $I(f) \perp \mathbb{K}(f)$ et on obtient l'égalité avec les dimensions.

3. $I(f) = K(f)^\perp$ et $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}^\perp \subset K(f)$ car $s_u(x) = x$ si $x \perp u$. Pour l'inclusion inverse, on raisonne par récurrence sur p (évident si $p = 1$) : on pose $f = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} = s_{u_1} \circ g$ et si $x \in K(f)$ alors $f(x) = x$ puis $s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x \in I(g) \cap I(s_{u_1}) = \text{Vect}\{u_2, \dots, u_p\} \cap \text{Vect}\{u_1\}^\perp$ par HR appliquée à g ; les u_i étant libres, on en déduit $s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_p}(x) - x = s_{u_1}(x) - x = 0$ donc $x \in K(g) \cap K(s_{u_1}) \stackrel{\text{HR}}{=} \text{Vect}\{u_2, \dots, u_p\}^\perp \cap \text{Vect}\{u_1\}^\perp \subset \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}^\perp$.

Exercice 30 [sujet] 1. $(f(x) + f^{-1}(x)|y) = (f(x)|y) + (x|f(y)) = (f(y) + f^{-1}(y)|x)$ donc $f + f^{-1}$ est symétrique.

Soit x un vecteur propre de $f + f^{-1}$, on a $f^2(x) + x = \lambda f(x)$ donc $f^2(x) \in \text{Vect}\{x, f(x)\}$

2. On raisonne par récurrence sur $\dim(E)$: le résultat est évident en dimensions 1 et 2. Si on suppose le résultat en dimensions $n - 1$ et $n - 2$ et soit f est un endomorphisme orthogonal de E , de dimension n ; si f admet une valeur propre (associée à e) alors elle vaut ± 1 et $D = \text{Vect}\{e\}$ est une droite stable, sinon on choisit un vecteur x comme dans la première question et $P = \text{Vect}\{x, f(x)\}$ est un plan stable par f . Dans les deux cas D^\perp ou P^\perp sont stables aussi et l'endomorphisme induit par f sur cet orthogonal est un endomorphisme orthogonal auquel on peut donc appliquer l'HR

Exercice 31 [sujet] 1. ${}^t\bar{Z}AZ = \bar{\lambda} {}^t\bar{Z}Z = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ si Z est un vecteur propre de A . D'autre part, ${}^t\bar{Z}AZ =$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \bar{z}_i z_j$ est réel car A est réelle (si on conjugue la somme double, cela revient à échanger les deux indices i

et j). On en déduit $\bar{\lambda} = \frac{{}^t\bar{Z}AZ}{{}^t\bar{Z}Z} \in \mathbb{R}$ (c'est le début de la preuve du théorème spectral)

2. Si $\lambda = a + ib$ alors $A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$ donne $AX = aX - bY$ et $AY = bX + aY$. Reste à vérifier la liberté : si $Y = \alpha X$ (ou l'inverse), alors $A(1 + i\alpha)X = \lambda(1 + i\alpha)X$ donc X est un vecteur propre réel associé à la valeur propre non réelle λ (et A est réelle), c'est absurde si $X \neq 0$.

3. C'est une matrice orthogonale de taille 2 et sans valeur propre réelle (car λ en est une valeur propre non réelle donc la seconde est $\bar{\lambda}$) donc de la forme $R(\theta)$ (avec $\theta \in]0, 2\pi[$).

4. Le résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$ car les matrices $S(\theta)$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (et même $n = 3$); si on suppose le résultat vrai en dimensions $n - 1$ et $n - 2$ et si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on distingue si A possède une valeur propre réelle ou non : si A possède une valeur propre réelle, elle vaut ± 1 et on trouve une droite stable F ; sinon, on introduit un plan stable F par b. Comme A est orthogonale, F^\perp est stable par A donc on applique l'HR à l'endomorphisme (orthogonal) induit par A sur F^\perp et on conclut dans une bon adaptée à $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$.

Exercice 32 [sujet] $\mathcal{X}_A = X(X^2 + 2)$ donc une seule droite stable $E_0 = \text{Vect}\{(3, 0, 2)\}$.

Si P est un plan stable, $X \in P^\perp$ et $Y \in P$ alors $({}^tAX|Y) = (X|AY) = 0$ car $AY \in P$; on a même P est stable par A si et seulement si P^\perp est stable par tA (réappliquer à tA). Comme $\mathcal{X}_{{}^tA} = \mathcal{X}_A$, tA possède une seule droite stable $E_0({}^tA) = \text{Vect}\{(2, 0, 3)\}$ donc A possède un unique plan stable $P = E_0({}^tA)^\perp$.

Exercice 33 [sujet] 1. fait en cours (réduction)

2. Si A laisse stable tous les hyperplans alors (cf ex 32) tA laisse toutes les droites stables donc ${}^tA = \lambda I_n$ et $A = \lambda I_n$.

3. Si $r \leq \frac{n}{2}$, toute droite est l'intersection de deux sev de dimension r : si $D = \text{Vect}\{e\}$, on complète en (e, e_2, \dots, e_n) base de E puis $D = \text{Vect}\{e, e_2, \dots, e_r\} \cap \text{Vect}\{e, e_{r+1}, \dots, e_{2r-1}\}$, ces deux sev sont stables donc D aussi et on termine avec la première question. Si $r \geq \frac{n}{2}$, alors tA laisse stable tous les sev de dim $n - r \leq \frac{n}{2}$ et on termine avec tA qui vérifie ce que l'on a fait avant avec A .

Exercice 34 [sujet] 1. Si $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors ${}^tPAP = \text{diag}(-1, -1, 1)$

2. si $(u_0, v_0, w_0) = x_0 + y_0$ avec $x_0 \in E_{-1}(A)$ et $y_0 \in E_1(A)$ alors $(u_n, v_n, w_n) = (-1)^n x_0 + y_0$ donc CV si et seulement si $x_0 = 0$ donc si et seulement si $(u_0, v_0, w_0) \in E_1(A)$, ie si et seulement si $u_0 = v_0 = w_0$

Exercice 35 [sujet] $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et ${}^tPAP = \text{diag}(3, 3, -3)$.

Exercice 36 [sujet] 1. $E_0(K) = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$, $E_{\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\{(1\sqrt{2}, 1)\}$ et $E_{-\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\{(1, -\sqrt{2}, 1)\}$

2. $M(a, b, c) = (a - b)I_3 + cK + bK^2$ donc $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient

Exercice 37 [sujet] 1. B est sym réelle

2. $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A) = 1$ et $b_{i,j} = a_i a_j$ et $A \neq 0$ donc $B \neq 0$ et $\text{rg}(B) = 1$

3. $\dim(E_0(B)) = n - \text{rg}(B) = n - 1 \stackrel{\text{DZ}}{=} m_0(B)$ puis $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n a_i^2 = A^T A$ donc $\mathcal{X}_B = X^{n-1}(X - A^T A)$. Enfin, $\ker(A^T) \subset \ker(B)$ donc, comme $\ker(A^T)$ est un hyperplan, $E_0(B) = \ker(A^T)$ et on vérifie $BA = (A^T A)A$ donc $E_{A^T A}(B) = \text{Vect}\{A\}$

Exercice 38 [sujet] 1. Cours (début de la preuve du théorème spectral)

2. $\text{Tr}(A) = n$ et $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

On a $\text{rg}(A) = 2$ donc (A est DZ) $m_0(A) = \dim(E_0(A)) = n - 2$; en DZ A , les deux dernières vp vérifient $\lambda + \mu = \text{Tr}(A)$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ donc $\lambda\mu = \frac{1}{2}[(\lambda + \mu)^2 - (\lambda^2 + \mu^2)] = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ donc λ et μ sont les deux racines de $X^2 - nX - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = 0$

Exercice 39 [sujet] $B \in \mathcal{S}_{10}(\mathbb{R})$ est DZ et $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A) \leq 5$ donc $m_0(B) \geq \dim(E_0(B)) \geq 5$

Exercice 40 [sujet] $M + {}^tM$ est symétrique réelle donc DZ, de plus X^k annule $M + {}^tM$ donc $\text{Sp}(M + {}^tM) \subset \{0\}$ puis $M + {}^tM$ est semblable à 0, donc nulle.

Exercice 41 [sujet] 1. Par commutativité, $({}^tAA)^n = {}^tA^n A = 0$

2. $B = {}^tAA$ est DZ (symétrique réelle), X^n annule B donc $\text{Sp}(B) = \{0\}$ donc $B = 0$ puis $\|A\|^2 = \text{Tr}(B) = 0$ donc $A = 0$.

Exercice 42 [sujet] ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}({}^tA) = p$

Exercice 43 [sujet] B est symétrique réelle donc DZ, $\text{Tr}(B) = 0$ donc la seule vp possible de B est 0; B est semblable à la matrice nulle donc $B = 0$.

Exercice 44 [sujet] A est DZ donc $\sum \lambda_i^2 = \text{Tr}(A^2)$ et $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2 = \sum a_{i,j}$

Exercice 45 [sujet] tAA est symétrique réelle donc DZ et le nombre de vp non nulles de tAA est $\text{rg}({}^tAA)$. Comme $\ker(A) = \ker({}^tAA)$, on a $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.

Exercice 46 [sujet] $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) {}^tP$ avec $r = \text{rg}(A)$, $\lambda_i \neq 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; on a $\text{Tr}(A)^2 = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)^2 \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^r 1^2\right) = \text{Tr}(A^2) \text{rg}(A)$

Exercice 47 [sujet] Si $D = \text{diag}(\lambda_i)$ alors $(DY)_{i,j} = \lambda_i y_{i,j}$ donc (avec Y sym) $\text{Tr}(DYDY) = \sum_{(i,j)} \lambda_i \lambda_j y_{i,j}^2 \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq}$

$\sqrt{\sum_{(i,j)} (\lambda_i y_{i,j})^2} \times \sqrt{\sum_{(i,j)} (\lambda_j y_{i,j})^2} = \sum_{(i,j)} (\lambda_i y_{i,j})^2$ en échangeant i et j . Enfin, $\text{Tr}(D^2 Y^2) = \sum_{(i,j)} \lambda_i^2 y_{i,j}^2$.

Sinon, $X = PDP^T$ $\text{Tr}(XYXY) = \text{Tr}(PDP^T Y PDP^T Y) = \text{Tr}(DP^T Y PDP^T Y) = \text{Tr}(DZ)$ avec $Z = P^T Y P$ symétrique réelle donc $\text{Tr}(XYXY) \leq \text{Tr}(D^2 Z^2) = \text{Tr}(D^2 P^T Y^2 P) = \text{Tr}(PD^2 P^T Y^2) = \text{Tr}(X^2 Y^2)$.

Exercice 48 [sujet] 1. a) $({}^tBB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n b_{k,i}^2 = \text{Card}(E_i) = c$ et, si $i \neq j$, $({}^tBB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i}b_{k,j} = \text{Card}(E_i \cap E_j) = d$

donc ${}^tBB = (c-d)I_n + dJ_n$

b) tBB est symétrique réelle et comme $\text{rg}(J_n) = 1$, on trouve $\text{rg}({}^tBB - (c-d)I_n) = 1$ donc $m_{c-d}({}^tBB) \stackrel{\text{DZ}}{=} \dim(E_{c-d}({}^tBB)) = n-1$; la dernière valeur propre est donc $\text{Tr}({}^tBB) - (n-1)(c-d) = c + (n-1)d$

c) $c + (n-1)d > 0$ et si $c = d$ alors les E_i sont tous égaux donc $0 \notin \text{Sp}({}^tBB)$ donc tBB puis B sont inversibles.

2. $(J_n B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,j} = \text{Card}(E_j) = c$ et $(B J_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}$ est le nombre de parties qui contiennent i . On suppose donc que pour chaque i , il existe exactement c parties qui contiennent i .

3. Comme $J_n^2 = nJ_n$, on a ${}^tBBJ_n = (c + (n-1)d)J_n$. On a alors $\|BJ_n\|^2 = \text{Tr}({}^tJ_n {}^tBBJ_n) = \text{Tr}(n(c + (n-1)d)J_n) = n^2(c + (n-1)d)$ et $\|BJ_n\|^2 = \|J_n B\|^2 = \sum_{i,j} (J_n B)_{i,j}^2 = \sum_{i,j} c^2 = n^2c^2$. On en déduit $n^2c^2 = n^2(c + (n-1)d)$ donc

$$c^2 = c + (n-1)d.$$

Exercice 49 [sujet] $(f(x)|y) = (x|y) + k(x|a)(a|y) = (x|f(y))$ donc f est symétrique. Si $f(x) = 0$ alors $x = -k(x|a)a \in \text{Vect}\{a\}$ et comme $f(a) = (1+k\|a\|^2)a = (1+k)a \neq 0$, on a $\ker(f) = \{0\}$. Si $x \in \text{Vect}\{a\}^\perp$ alors $f(x) = x$ donc $1 \in \text{Sp}(f)$ est $\text{Vect}\{a\}^\perp \subset E_1(f)$; de plus $f(a) = (1+k)a$ donc $1+k \in \text{Sp}(f)$. On a donc $\mathcal{X}_A = (X-1)^{n-1}(X-1-k)$, $E_{1+k}(f) = \text{Vect}\{a\}$ et $E_1(f) = \text{Vect}\{a\}^\perp$.

Exercice 50 [sujet] 1. Facile avec $\langle P|P \rangle = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0$ donc α est racine de P d'ordre $\geq n+1$ et $\deg(P) \leq n$ donc $P = 0$.

2. Endomorphisme facile. $\varphi(P)^{(k)} = (X-\alpha)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$ donc $\langle \varphi(P)|Q \rangle = \sum_{k=0}^n kP^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha) = \langle P|\varphi(Q) \rangle$.

Exercice 51 [sujet] Vérifier $(T(f)|g) = (f|T(g))$ par des IPP (en remarquant $T(f) = (uf)'$ pour aller plus vite).

Exercice 52 [sujet] 1. Soit (e_i) une bon de vecteurs propres; si $x = \sum x_i e_i$ alors $(f(x)|x) = \sum \lambda_i x_i^2$ et $\|x\|^2 = \sum x_i^2$

2. $0 = \lambda_n \|x\|^n - (f(x)|x) = \sum (\lambda_n - \lambda_i)x_i^2$ (somme de termes positifs); donc $x_i = 0$ si $\lambda_i \neq \lambda_n$, ce qui donne $x \in \text{Vect}\{e_i, \lambda_i = \lambda_n\} = E_{\lambda_n}(f)$

3. On raisonne par récurrence sur n : pour $n=1$, toute base est formée de vecteurs propres. On suppose le résultat pour un endomorphisme symétrique d'un espace de dimension $n-1$; $(f(e_n)|e_n) = \lambda_n$ donne e_n vecteur propre associé à λ_n d'après la question précédente; $H = \text{Vect}\{e_n\}^\perp$ est un hyperplan stable par f (donc de dimension $n-1$), l'endomorphisme g induit par f sur H est symétrique et ses valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, (e_1, \dots, e_{n-1}) est une bon de H et vérifie $(g(e_i)|e_i) = \lambda_i$ donc par HR, les e_i sont des vecteurs propres de g , donc de f .

Exercice 53 [sujet] 1. Si $X = \sum_{i=1}^k x_i e_i$ alors $AX = \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) e_i$ et $\langle AX, X \rangle \stackrel{\text{bon}}{=} \sum_{i=1}^k k \lambda_i(A) x_i^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$ d'où le résultat avec $\lambda_i(A) \in [\lambda_1(A), \lambda_k(A)]$

2. On commence par justifier que $\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X)$ existe car $R_A(V \setminus \{0\}) = R_A(S(0,1) \cap V)$ par bilinéarité du produit scalaire car $R_A(X) = R_A\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$. Comme R_A est continue (car $(X,Y) \mapsto \langle AX|Y \rangle$ est bilinéaire) et $V \cap S(0,1)$ est une partie fermée bornée non vide, $\max_{S(0,1)} R_A$ existe pour tout sev V .

Avec $V = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} \in G_k$ on vérifie donc $\max_{X \in V_k \setminus \{0\}} R_A(X) = \lambda_k(A)$ qui est atteint pour $X = e_k$. Si maintenant $V \in G_k$ alors $V \cap \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\} \neq \{0\}$ car $\dim(V) + \dim(\text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}) = n+1 > \dim \mathbb{R}^n$ donc il existe un vecteur $X \neq 0$ tel que $X \in V$ et $X = \sum_{i=k}^n x_i e_i$; pour un tel vecteur, on a $R_A(X) \geq \lambda_k(A)$ par le même calcul que

Q1. On a donc $\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \geq \lambda_k(A)$ ce qui donne bien $\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k} \left(\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \right)$, le minimum sur V étant atteint avec $V = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$.

3. Comme $R_{A+B}(X) = R_A(X) + R_B(X)$, pour $X \in V \in G_k$, on a $R_{A+B}(X) \leq \lambda_n(A) + R_B(X)$ donc avec $V'_k = \text{Vect}\{e'_1, \dots, e'_k\}$ où (e'_i) est une bon de vecteurs propres de B , on a $R_{A+B}(X) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B)$ puis $\max_{V'_k \setminus \{0\}} R_{A+B} \leq$

$$\lambda_n(A) + \lambda_k(B) \text{ donc } \lambda_k(A+B) = \min_{V \in G_k} \left(\max_{V \setminus \{0\}} R_{A+B} \right) \leq \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

Exercice 54 [sujet] 1. $g = \sum_{k=1}^n u_k - id$ est symétrique

2. On a $(g(x)|x) = 0$ pour tout x donc $\text{Sp}(g) = \{0\}$ et $g = 0$ car DZ

3. On a $x = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ donc $E = \sum_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$ ce qui donne $E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$ avec l'égalité des dimensions. Pour $x \in E$, on

a $u_i(x) = \sum_{k=1}^n u_k \circ u_i(x)$ donc par unicité de l'écriture dans une famille d'espaces en somme directe, on a $u_i(x) = u_i^2(x)$ (proj) et $u_k \circ u_i(x) = 0$ si $i \neq k$. Enfin $(u_i(x)|u_j(y)) = (u_j \circ u_i(x)|y) = 0$ si $i \neq j$ donc les images sont orthogonales.

Exercice 55 [sujet] 1. Si $BX = \lambda X$ et $X \neq 0$ alors ${}^t X B X = \|AX\|^2 > 0$ et ${}^t X B X = \lambda \|X\|^2$; on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$
 2. pour $i \geq 2$, on a $(BX_1|X_i) = (AX_1|AX_i) = 0$ donc $BX_1 \in \text{Vect}\{X_2, \dots, X_n\}^\perp = \text{Vect}\{X_1\}$

Exercice 56 [sujet] Soit (e_1, \dots, e_n) une bon de vecteurs propres de u , on pose $e = e_1 + \dots + e_n$ et on a $(u(e)|e) = \text{Tr}(u) = 0$; on a $E = \text{Vect}\{e\} \oplus H$ et H est stable par u . Si v est l'endomorphisme induit par u sur H , on a $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(v)$ donc on applique l'HR à v et on obtient une bon de E en rajoutant $\frac{1}{\sqrt{n}}e$ à la bon de H donnée par l'HR

Exercice 57 [sujet] On a $\text{Tr}(S^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ et $\text{Tr}(S^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i \geq 1} a_{i,i}^2$; on a donc $\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 = 0$ puis (somme de termes positifs nulle) $S = D$

Exercice 58 [sujet] $\phi(P) = ((1 - X^2)P)'$ donc par IPP, $(\phi(P)|Q) = - \int_{-1}^1 (1 - t^2)P'(t)Q'(t) dt$ puis $(\phi(P)|Q) = (\phi(Q)|P) = (P|\phi(Q))$
 La matrice de ϕ dans la base canonique est triangulaire supérieure donc les vp de ϕ sont les $k(k+1)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 59 [sujet] 1. Fait en cours.

2. $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$

3. $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p) + \ker(q)$ donc $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp \subset \text{Im}(p)^\perp = \ker(p)$; de même $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp \subset \ker(q)^\perp = \text{Im}(q)$; réciproq, si $x \in \ker(p) \cap \text{Im}(q)$ et $p(a) + b \in \text{Im}(p) + \ker(q)$ alors $q(x) = x$ donc $(x|p(a) + b) = (p(x)|a) + (q(x)|a) = (x|q(a)) = 0$.

4. $\text{Im}(p)$ est stable par $p \circ q \circ p$ donc il existe une base (e_i) de $\text{Im}(p)$ constituée de vecteurs propres de $p \circ q \circ p$; pour de tels vecteurs, on a $p(e_i) = e_i$ donc $p \circ q(e_i) = p \circ q \circ p(e_i) = \lambda_i e_i$ donc ce sont aussi des vecteurs propres de $p \circ q$.
 $E = \text{Im}(p) + \ker(q) + (\ker(p) \cap \text{Im}(q))$; on complète la famille précédente par une base (f_j) de $\ker(q)$ et une base (g_k) de $\ker(p) \cap \text{Im}(q)$, on obtient une famille génératrice \mathcal{G} de E qui vérifie $p \circ q(f_j) = 0$ et $p \circ q(g_k) = p(g_k) = 0$. Ainsi \mathcal{G} est constituée de vecteurs propres de $p \circ q$; on en extrait une base qui reste constituée de vecteurs propres de $p \circ q$.

On vient de voir que les valeurs propres de $p \circ q$ sont 0 et des valeurs propres de $p \circ q \circ p$; on vérifie que $0 \leq (q(x)|x) \leq \|x\|$ (car $\text{Sp}(q) \in \{0, 1\}$, avec une bon de vecteurs propres) puis $(p \circ q \circ p(x)|x) = (q \circ p(x)|p(x))$ donc $0 \leq (p \circ q \circ p(x)|x) \leq \|p(x)\| \leq \|x\|$ (Bessel) donc $\text{Sp}(p \circ q \circ p) \subset [0, 1]$.

Exercice 60 [sujet] 1. fait en cours

2. fait en cours

3. produit scalaire $(X|Y) = X^T A Y$

Exercice 61 [sujet] 1. Si $A = P D^t P$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$ alors $A + r I_n = P(D + r I_n)^t P$ donc les vp de $A + r I_n$ sont les $\lambda_i + r > 0$

2. De même, on trouve que $B = P(D - r I_n)(D + r I_n)^{-1} P$ est symétrique et les vp de B sont $\frac{\lambda_i - r}{\lambda_i + r} \in]-1, 1[$

Exercice 62 [sujet] 1. on remarque $N = {}^t M M$ donc $(N X|X) = ({}^t M M X|X) = (M X|M X)$

2. $N^p = (M^p)^{p+1} = {}^t M^{p+1} = {}^t N = N$ car $N = {}^t M M$ est symétrique. On a $\text{Sp}(N) \subset \{-1, 0, 1\}$ (-1 selon la parité de n) car N est symétrique réelle donc ses vp sont réelles

3. $\text{Sp}(N) \subset \mathbb{R}^+$ d'après a donc $\text{Sp}(N) \subset \{0, 1\}$ et N est DZ (symétrique réelle) donc $X(X-1)$ annule N .

4. $\ker(M) \stackrel{\text{cours}}{=} \ker({}^t M M) = \ker(N)$ et $\text{Im}(N) = \text{Im}(M^{p+1}) \subset \text{Im}(M)$, égalité par dimensions

Exercice 63 [sujet] 1. Si U et V non inversibles alors $\det(U) = \det(V) = 0$, $(U X|X) \geq 0$ et $(V X|X) \geq 0$ donc $((U+V)X|X) \geq 0$, ie $\text{Sp}(U+V) \in \mathbb{R}^+$ et $\det(U+V) \geq 0 = \det(U) + \det(V)$.

2. Si λ_i sont les vp de U alors $\det(U + I_n) = \prod (1 + \lambda_i) \geq 1 + \prod \lambda_i = 1 + \det(U)$.

3. Si V est symétrique réelle, on peut écrire $V = M^2$ avec M symétrique; si V est inversible alors M aussi puis $\det(U+V) = \det(M) \det(I_n + M^{-1} U M^{-1}) \det(M)$ et on vérifie que l'on peut appliquer le cas précédent à $U' = M^{-1} U M^{-1}$: U' est symétrique et ${}^t X U' X = {}^t (M^{-1} X) U (M^{-1} X) \geq 0$ (car $\text{Sp}(U) \subset \mathbb{R}^+$) donc $\text{Sp}(U') \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 64 [sujet] 1. fait en cours

2. On écrit, si U inversible, $U = S^2$ avec S symétrique réelle inversible puis $UV = S^{-1}(SVS)S$ donc $\text{Sp}(UV) = \text{Sp}(SVS)$ et comme $(SVSX|X) = (V(SX)|SX) \geq 0$, on a $\text{Sp}(SVS) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 65 [sujet] 1. Fait en cours

2. $AB = R^{-1}(RAR)R$ est semblable à RAR qui est symétrique réelle

3. $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(RAR)$ et $(RARX|X) = (AY|Y) \geq 0$ (avec $Y = RX$) car $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (cf cours); on en déduit $\text{Sp}(RAR) \in \mathbb{R}^+$ (cf cours)

Exercice 66 [sujet] 1. $\text{Tr}(AA^T) = \|A^T\|^2 > 0$ si $A \neq 0$

2. $S = PDP^T = P\Delta^2P^T$ (avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$) et prendre $A = \Delta P^T$ qui est inversible car $\lambda_i > 0$ et P inversible.

3. $\text{Tr}(SS') = \text{Tr}(A^T AS') = \text{Tr}(AS'A^T) > 0$ car $AS'A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $(AS'A^T X|X) = (S'A^T X|A^T X) > 0$ si $X \neq 0$ car A^T est inversible. (on a même $\text{Sp}(SS') \subset \mathbb{R}^{+*}$)

Exercice 67 [sujet] Si ϕ existe et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ alors ${}^t X M X = \phi(y, y)$ avec $y = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Réciproquement, si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $m_{i,j} = (M e_j | e_i)$ et on vérifie que $\phi(x, y) = (Mx|y)$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

Exercice 68 [sujet] 1. Si A est la matrice de f dans la base (e_i) alors $a_{i,j} = (e_i | f(e_j))$.

2. Si (e_i) est une bon de vecteurs propres de f et λ_i les vp de f alors $\text{Tr}(g \circ f) = \sum \lambda_i (g(e_i) | e_i) \geq 0$ car $\lambda_i \geq 0$ et $g(x)|x \geq 0$ pour tout x

Exercice 69 [sujet] 1. $(AX|X) = (X|{}^t AX) = -(X|AX)$

2. Si $(A+B)X = 0$ alors $0 = ((A+B)X|X) = (BX|X) > 0$ si $X \neq 0$ donc $\ker(A+B) = \{0\}$.

Exercice 70 [sujet] 1. p et q sont symétriques donc u est symétrique donc DZ

2. $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$ donc $0 \leq (p(x)|x) \leq \|x\|^2$, ce qui donne $0 \leq (u(x)|x) \leq 2\|x\|^2$ donc $\text{Sp}(u) \subset [0, 2]$. Si $u(x) = 0$ alors $(p(x)|x) = (q(x)|x) = 0$, ce qui donne $p(x) = q(x) = 0$ (prendre une bon de vecteurs propres de p), on a donc $\ker(u) \subset \ker(p) \cap \ker(q)$, réciproque évidente. On trouve de même $\ker(u - 2id) = \ker(p - id) \cap \ker(q - id)$

Exercice 71 [sujet] 1. Facile en DZ f dans une bon (le signe des vp ne sert à rien pour la première partie); puis fait en cours

2. Si $(f+g)(x) = 0$ alors $(f(x)|x) + (g(x)|x) = 0$ et comme les deux termes sont ≥ 0 , on a $(f(x)|x) = (g(x)|x) = 0$, ce qui donne $f(x) = g(x) = 0$ (avec une bon de vecteurs propres de chaque endomorphisme); on a donc $\ker(f+g) \subset \ker(f) \cap \ker(g)$ (récip évidente). On en déduit $\text{Im}(f+g) = \ker(f+g)^\perp = \ker(f)^\perp + \ker(g)^\perp = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Exercice 72 [sujet] 1. $(f(x)|y) = \sum (e_k|x)(e_k|y) = (f(y)|x) = (x|f(y))$ puis $(f(x)|x) = \sum (e_k|x)^2 > 0$ si $x \neq 0$.

2. f^{-1} est lui aussi symétrique défini positif donc cf cours

Exercice 73 [sujet] $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}({}^t AB) = (A|B) \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} \|A\| \|B\|$ puis $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$ (DZ A) $(\text{Tr}(A))^2 =$

$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ (à vérifier par récurrence sur n avec les $\lambda_i \geq 0$)

Exercice 74 [sujet] $A = PD^t P$ donc $|\text{Tr}(AU)| = |\text{Tr}(D^t PUP)| = |\text{Tr}(DQ)|$ avec $Q = {}^t PUP$ orthogonale. On en déduit $|\text{Tr}(AU)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{i,i} \right| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(D) = \text{Tr}(A)$ car $\lambda_i \geq 0$ et comme Q est orthogonale, $\sum_{i=1}^n q_{i,j}^2 = 1$, ce qui donne $|q_{i,i}| \leq 1$.

Exercice 75 [sujet] 1. $\text{Tr}(AB) = (A|B) \leq \|A\| \|B\|$ et $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum \lambda_i^2 \leq \left(\sum \lambda_i\right)^2 = \text{Tr}(A)^2$ car $\lambda_i \geq 0$

2. norme cf cours; $\|MN\|^2 = \text{Tr}({}^N {}^t M M N) = \text{Tr}({}^t M M N {}^t N) \leq \text{Tr}({}^t M M) \text{Tr}({}^t N N) = \|M\|^2 \|N\|^2$.

Exercice 76 [sujet] Si la décomposition existe alors ${}^t AA = S^2$; on vérifie donc que ${}^t AA$ est symétrique définie positive (car $({}^t AAX|X) = \|AX\|^2 > 0$ si $X \neq 0$ car A est inversible), il existe donc S symétrique définie positive telle que ${}^t AA = S^2$ (cf cours); on pose alors $O = AS^{-1}$ et on vérifie ${}^t OO = S^{-1} {}^t AAS^{-1} = I_n$ donc O est bien orthogonale

Exercice 77 [sujet] 1. Si f contraction et e un vecteur propre alors $|\lambda| \|x\| = \|f(x)\| \leq \|x\|$ et $x \neq 0$ donc $|\lambda| \leq 1$.

Réciproquement, on diagonalise f dans une bon, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ puis $\|f(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \|x\|$

2. Il suffit de diagonaliser f et de remarquer que les vp de $P(f)$ sont les $P(\lambda_i)$

3. Début fait en cours. Comme $\|MX\|^2 = {}^t(MX)(MX) = {}^tXS^2X = \|SX\|^2$ donc M est une contraction si et seulement si S est une contraction donc si et seulement si $\text{Sp}(S) \in [-1, 1]$ donc si et seulement si $\text{Sp}({}^tMM) \in [0, 1]$ (les vp de tMM sont déjà positives)

Exercice 78 [sujet] $P = X(X^2 + 4X + 5)$ n'admet que 0 comme racine réelle; A est symétrique réelle donc DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on en déduit $\text{Sp}(A) = \{0\}$ puis $A = 0$ (semblable à la matrice nulle)

Exercice 79 [sujet] 1. $P = X^4 - X = X(X - 1)(X^2 + X + 1)$ annule A

2. Si $0 \in \text{Sp}(A)$ alors $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ car A étant réelle, on ne peut pas avoir j ou j^2 vp seule et $\text{Sp}(A) = \{0\}$ donnerait $A = 0$ car A est DZ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (car P est SARS); on ne déduit que $X(X - 1)$ annule A (car DZ) donc $A^2 = A$, ce qui donne $A = {}^tA$ donc A est symétrique réelle avec $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$

Exercice 80 [sujet] A est DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbf{U}_k$ (racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité) donc les deux seules vp possibles de A sont ± 1 et $(X + 1)(X - 1)$ annule donc A (car DZ)

Exercice 81 [sujet] 1. cours

2. si $B = {}^tMM$ alors (par commutativité) $B^2 = {}^tM^2M^2 = 16I_2$ donc $(X - 4)(X + 4)$ annule B ; avec la question précédente, on en déduit $\text{Sp}(B) = \{4\}$ et comme B est DZ, on a $B = 4I_2$

3. On a donc $M = 2R(\theta)$ (car $(2S(\theta))^2 = 4I_2$) et en remplaçant on trouve deux solutions : $M = 2R(\pm\pi/2)$

Exercice 82 [sujet] 1. $(MM^T)^3 \stackrel{MM^T = M^T M}{=} M^3(M^T)^3 = I_3$ donc $X^3 - 1$ annule MM^T et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(MM^T) \subset \{1, j, j^2\}$; MM^T est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles puis $\text{Sp}(MM^T) = \{1\}$ donc (DZ) $MM^T = I_n$.

2. Si $n = 3$ alors $\det(M)^3 = 1$ donc $\det(M) = 1$ (car M est inv) donc M est une rotation. On écrit $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} P^T$; M est alors solution si et seulement si $R(\theta)^3 = I_2$ donc $3\theta = 2k\pi$ et M est I_3 , ou une rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$

Exercice 83 [sujet] 1. $M^4 = M^3 - M^2 + M = I_n$ donc $\Omega^4 = I_n$

2. $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$ est SARS dans \mathbb{C}

3. $\text{Sp}(M) \subset \{1, i, -i\}$ et M réelle donc $m_i(M) = m_{-i}(M)$ et $\text{Tr}(M) = m_1(M)$ donc $n = 2p$ avec $p = m_i(M)$. Comme $1 \notin \text{Sp}(M)$, et $(M - I_n)(M^2 + I_n) = 0$, on a $M^2 = -I_n$. Ω est sym réelle positive et $\text{Sp}(\Omega) \subset \{\pm 1\}$ donc $\Omega = I_n$ donc M est orthogonale et $M^T = M^{-1} = -M$. On construit alors une bon de E par récurrence : on choisit e_1 unitaire et on pose $f_1 = Me_1$ qui est unitaire car $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; de plus $(e_1|f_1) = (e_1|Me_1) = (M^T e_1|e_1) = -(Me_1|e_1) = -(f_1|e_1)$ donc (e_1, f_1) est une famille orthonormale et $Mf_1 = M^2 e_1 = -e_1$. Si on suppose avoir construit une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k)$ telle que $f_i = Me_i$ (et donc $Mf_i = -e_i$ car $M^2 = -I_n$), on choisit e_{k+1} unitaire dans $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k\}^\perp$ puis on pose $f_{k+1} = Me_{k+1}$, qui est unitaire car $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; on a, pour $i \leq k$, $(f_{k+1}|e_i) = (Me_{k+1}|e_i) = (e_{k+1}|M^T e_i) = -(e_{k+1}|Me_i) = -(e_{k+1}|f_i) = 0$, puis $(f_{k+1}|f_i) = (Me_{k+1}|Me_i) = (e_{k+1}|e_i) = 0$ et $(f_{k+1}|e_{k+1}) = (Me_{k+1}|e_{k+1}) = (e_{k+1}|M^T e_{k+1}) = -(e_{k+1}|Me_{k+1}) = -(e_{k+1}|f_{k+1})$ donc la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k, f_{k+1})$ est toujours orthonormale. Lorsque $k = p$, on obtient une bon dans la quelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M est celle cherchée.

Exercice 84 [sujet] 1. $I_n - M = {}^tM^2 = (I_n - M^2)^2$ donc $P = X(X - 1)(X^2 + X - 1)$ annule M

2. $\det(M - I_n) = \det({}^tM - I_n) = \det(-M^2) \neq 0$ car M est inversible.

3. On a $M(M - I_n)(M^2 + M - I_n) = 0$ donc en simplifiant par M et $M - I_n$ inversible, on a $M^2 + M = I_n$. On en déduit (avec l'équation initiale) $M = {}^tM$ donc M est symétrique réelle, $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_i = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On

vérifie alors que les solutions sont toutes les matrices orthogonalement semblables à $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_p & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n-p} \end{pmatrix}$

Exercice 85 [sujet] 1. Comme $\det(M) = \det(M^T)$, on a $\det(M)^5 = 1$ donc $\det(M) = 1$ (réelle)

2. $M^{-1} = (M^T M)^{-2}$ est symétrique donc M aussi

3. Reste $M^5 = I_n$, M est DZ par th spec et $\text{Sp}(M) \subset \{1\}$ (pas de vp complexe) donc $M = I_n$

Exercice 86 [sujet] $A = PD^tP$ donc $B = P(D^3 + D + I_n)^tP$; il suffit donc de trouver un polynôme Q tel que $\lambda = Q(\lambda^3 + \lambda + 1)$ pour les vp de A . Un tel polynôme existe par interpolation de Lagrange : introduire les vp distinctes et vérifier que $x \mapsto x^3 + x + 1$ est strictement croissante donc bijectives (donc si les $\lambda_i^3 + \lambda_i + 1$ sont distinctes alors les λ_i aussi)

Exercice 87 [sujet] Si $X \in E_\lambda(A)$ ($X \neq 0$) alors $A^{2p+1}X = \lambda^{2p+1}X$ donc $0 = (B^{2p} + \lambda B^{2p-1} + \dots + \lambda^{2p}I_n)(B - \lambda I_n)X$; on en déduit $BX = \lambda X$: si $\lambda \neq 0$, la matrice $(B^{2p} + \lambda B^{2p-1} + \dots + \lambda^{2p}I_n)$ est inversible car $\text{Sp}(B) \in \mathbb{R}$ et la seule racine réelle de $X^{2p+1} - \lambda^{2p+1}$ est λ ; si $\lambda = 0$ alors $X \in \ker(B^{2p+1}) = \ker(B)$ car B est DZ. On a donc $E_\lambda(A) = E_\lambda(B)$ (l'inclusion inverse se fait de même); A et B sont donc DZ dans la même base et comme $x \mapsto x^{2p+1}$ est injective, on en déduit $A = B$ (en prenant des matrices diagonales semblables à A et B)

Bien sûr que non : si $A = -B$, on a aussi $A^2 = B^2$; on peut encore prouver que A et B sont codiagonalisables dans une bon, $A = P\text{diag}(\lambda_i)^tP$ et $B = P\text{diag}(\pm\lambda_i)^tP$.

Exercice 88 [sujet] A^2 est symétrique et ses vp sont les carrés des vp de A donc les vp de A^2 sont réelles; de plus $(A^2X|X) = -\|AX\|^2 \leq 0$ donc les vp de A sont des complexes dont les carrés sont dans \mathbb{R}^- donc des imaginaires purs. Comme A est réelle, on regroupe les vp de A avec leurs conjuguées et on a $\det(A) = 0^{m_0(A)} \times \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} |\lambda|^{m_\lambda(A)} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 89 [sujet] 1. On aurait $(A^2X|X) = \lambda\|X\|^2$ et $(A^2X|X) = -\|AX\|^2$ donc $\|AX\| = 0$ pour tout X et $A = 0$ ce qui est absurde

2. Si $\lambda = 0$, $A = 0$ convient et si $\lambda < 0$, on a $\det(A)^2 = \lambda^n$ donc n est pair. Si on pose $\lambda = -\mu^2$ et A la matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie que $A^2 = \lambda I_n$.

3. n est pair, $n = 2p$ et on raisonne par récurrence sur p (évident pour $p = 1$) : si une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{2p-2}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_{2p-2}$ est orthogonalement semblable à une telle matrice et si $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ est antisymétrique et vérifie $A^2 = \lambda I_n$, on choisit X un vecteur unitaire et on a $(AX|X) = (X|{}^tAX) = -(X|AX)$; comme A est inversible ($\lambda \neq 0$), $AX \neq 0$ donc (X, AX) est une base de P plan stable par A . Si on norme le vecteur AX , on obtient une bon de P dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$. Reste à vérifier que P^\perp est stable et appliquer l'HR à l'endomorphisme induit sur P^\perp .

Exercice 90 [sujet] 1. Fait en cours

2. U^2 est symétrique réelle donc DZ; soit $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(U^2)} (X - \lambda)$, P est SARS et annule U^2 (car DZ). $Q = P(X^2)$ est annulateur de U , scindé dans \mathbb{C} (poser μ tel que $\mu^2 = \lambda$) et SARS si $\notin \text{Sp}(U)$. Reste le cas où $0 \in \text{Sp}(U)$, 0 est alors racine double de $Q = X^2R(X)$; on a $U^2R(U) = 0$ donc $\text{Im}(R(U)) \subset \ker(U^2) = \ker(U)$ d'après la première question donc $\text{Im}(R(U)) \subset \ker(U)$, ce qui donne $UR(U) = 0$ donc $XR(X)$ est aussi annulateur de U et SARS

Exercice 91 [sujet] 1. Fait en cours (evn)

2. $\|AX\|_2^2 = (AX|AX) = ({}^tAAX|X) = \sum \lambda_i x_i^2$ si $X = \sum x_i e_i$ avec (e_i) bon de vecteurs propres de tAA (symétrique réelle), on a donc $\|AX\|_2^2 \leq \max(\lambda_i) \sum x_i^2 = \max(\lambda_i) \|X\|_2^2$. On a donc $N(A) \leq \max(\lambda_i)$ et on obtient l'égalité avec un vecteur propre unitaire associé à la vp $\max(\lambda_i)$

Exercice 92 [sujet] 1. On décompose $X = \sum x_i e_i$ dans (e_i) une bon de vecteurs propres de A et on a ${}^tXX = \sum x_i^2$ et ${}^tXAX = \sum \lambda_i x_i^2$.

2. On pose $M = tA + (1-t)B$ qui est symétrique; on a ${}^tXMX \geq \mu {}^tXX$ avec $\mu = t \min \text{Sp}(A) + (1-t) \min \text{Sp}(B) \in I$ et $\min \text{Sp}(M) \geq \mu$ donc $\min \text{Sp}(M) \in I$; on fait de même avec $\max \text{Sp}(M)$

Exercice 93 [sujet] On pose $x = \sum x_i e_i$ avec (e_i) bon de vecteurs propres de ϕ et on a $\phi(x) = \sum \lambda_i x_i e_i$ donc $\|\phi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 = 1$; on en déduit $\max_{\|x\|=1} \|\phi(x)\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(\phi)} |\lambda|$ (atteint pour le vecteur de la base associé). De même, on a $|\langle \phi(x), x \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right|$ donc $\max |\langle \phi(x), x \rangle| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(\phi)} |\lambda|$ aussi