

**Correction du DM14**  
(extrait de Centrale MP 2016 maths 2)

**Partie I**

1. Si  $s > 0$ , on pose  $t = su$  : la fonction  $u \mapsto su$  est  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^+$  ; on a  $dt = s du$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{s^2 u^2} s du = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du$ .

Le résultat étant évident pour  $s = 0$  et par parité de la fonction  $s \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du$ , on obtient bien

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du = \frac{\pi}{2} |s| \text{ pour tout réel } s}$$

2. a) La fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos^n t}{t^2}$  est  $\mathcal{CM}^0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\left| \frac{1 - \cos^n t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$  donc  $t \mapsto \frac{1 - \cos^n t}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et  $\frac{1 - \cos^n t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{t^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^n \right] = \frac{1}{t^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2) \right) \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{n}{2}$  donc, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\boxed{t \mapsto \frac{1 - \cos^n t}{t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

On a  $u_{2n+2} - u_{2n} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} t (1 - \cos^2 t)}{t^2} dt \geq 0$  donc  $\boxed{(u_{2n})_{n \geq 1} \text{ est croissante}}$

- b)  $u_1 = \frac{\pi}{2}$  est donné par le texte.

On a  $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$  donc  $u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t^2} dt$ . On pose alors  $u = 2t : u \mapsto \frac{u}{2}$  est  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$  et on a  $u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2/2} \frac{du}{2}$  donc  $\boxed{u_2 = \frac{\pi}{2}}$

- c) On pose  $t = \sqrt{2u/n}$  : la fonction  $u \mapsto \sqrt{2u/n}$  est  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , on a  $dt = \frac{1}{\sqrt{2nu}} du$  et  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos \sqrt{2u/n})^n}{2u/n} \times \frac{du}{\sqrt{2nu}}$  donc  $\boxed{u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n}$

- d) On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $\theta : u \mapsto (\cos \sqrt{2u/n})^n$  :  $\theta$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1]$  et  $\theta'(u) = n \frac{1}{\sqrt{2nu}} (\sin \sqrt{2u/n}) (\cos \sqrt{2u/n})^{n-1}$  donc  $|\theta'(u)| \leq \frac{n}{\sqrt{2nu}} \sqrt{2u/n} = 1$ . On en déduit donc, si  $u \in ]0, 1]$ ,  $|\theta(u) - \theta(0)| \leq 1 \times |u - 0|$  qui est l'inégalité souhaitée.

- e) On applique le théorème de convergence dominée avec  $f_n(u) = \frac{1 - (\cos \sqrt{2u/n})^n}{u\sqrt{u}}$  :

H1 : Si  $u > 0$ , on a  $\left( \cos \sqrt{2u/n} \right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left[ n \ln \left( 1 - \frac{u}{n} + o \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \right) \right] = \exp \left[ n \left( -\frac{u}{n} + o \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \right) \right]$  donc  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$  vers  $u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ .

H2 : les fonctions  $f_n$  et la fonction  $u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$  sont  $\mathcal{CM}^0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

H3 : On a, d'après la question précédente,  $|f_n(u)| \leq \varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in ]0, 1] \\ \frac{1}{u\sqrt{u}} & \text{si } u > 1 \end{cases}$  La fonction  $\varphi$  est continue

par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

donc  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l}$

- f) On fait une intégration par parties :  $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$  et  $u \mapsto 1 - e^{-u}$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} = 0$  donc  $l = \left[ -2 \frac{1 - e^{-u}}{\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$ , ce qui donne  $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$

**Partie II**

1. a) On a  $E(X_k) = (-1)P(X_k = -1) + 1P(X_k = 1) = 0$  et par linéarité  $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$  donc  $\boxed{E(S_n) = 0}$

Les  $X_k$  étant indépendantes, donc 2 à 2 indépendantes, on a  $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$ . De plus, comme  $X_k^2 = 1$

presque surement, on a  $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1$  puis  $V(S_n) = n$

- b) On a  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T)) - E(\sin(S)\sin(T))$ ; comme  $S$  et  $T$  sont indépendantes,  $\cos(S)$  et  $\cos(T)$  (resp.  $\sin(S)$  et  $\sin(T)$ ) sont indépendantes. On en déduit  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T))$ . Comme  $T$  et  $-T$  ont la même loi, on a  $E(\sin(T)) = E(\sin(-T)) = -E(\sin(T))$  donc  $E(\sin(T)) = 0$ , ce qui donne  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$

- c) Les variables aléatoires discrètes  $S_{n-1}$  et  $X_n$  sont indépendantes (lemme des coalitions),  $X_n$  et  $-X_n$  ont la même loi donc, avec la question précédente,  $\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t)E(\cos(X_n t))$ .

Par le théorème de transfert, on a  $E(\cos(X_n t)) = \cos(-t)P(X_n = -1) + \cos(t)P(X_n = 1) = \cos(t)$ . Puis, par récurrence sur  $n$ , on trouve  $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$

- d) On a  $S_n(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$ , le théorème de transfert donne alors  $E(|S_n|) = \sum_{k=-n}^n |k|P(S_n = k)$  puis avec **I.1**,

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-n}^n \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(kt))P(S_n = k)}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{(1 - \cos(kt))P(S_n = k)}{t^2} dt. \text{ On a ensuite}$$

$$\sum_{k=-n}^n P(S_n = k) = 1 \text{ et } \sum_{k=-n}^n \cos(kt)P(S_n = k) = E(\cos(S_n t)) = \varphi_n(t) \text{ par le théorème de transfert à nouveau.}$$

On déduit de tout ceci  $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$

2. a) On a  $S_n^4 = S_{n-1}^4 + 4S_{n-1}^3 X_n + 6S_{n-1}^2 X_n^2 + 4S_{n-1} X_n^3 + X_n^4$ . Comme  $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ , on a  $X_n^2 = 1$ ,  $X_n^3 = X_n$  et  $X_n^4 = 1$ . De plus, par indépendance de  $S_{n-1}$  et  $X_n$ ,  $S_{n-1}^k$  et  $X_n^h$  sont indépendantes, donc  $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 4E(S_{n-1}^3)E(X_n) + 6E(S_{n-1}^2)E(1) + 4E(S_{n-1})E(X_n) + E(1)$ . Enfin, comme  $E(X_n) = 0$ , il reste  $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 6E(S_{n-1}^2) + 1$ . On calcule alors  $E(S_{n-1}^2) = V(S_{n-1}) + E(S_{n-1})^2 = n - 1$ , ce qui donne  $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 6n - 5$  puis par récurrence sur  $n$   $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$  car  $E(S_1^4) = E(X_1^4) = 1$ .

- b) On applique l'inégalité de Markov à  $U_n$ , qui est positive : on a  $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{E(U_n)}{1/\sqrt{n}} = \frac{E(S_n^4)}{n^3 \sqrt{n}}$  et comme

$$E(S_n^4) \leq 3n^2, \text{ on a bien } P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$$

- c) On a  $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geq n} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$  est une réunion dénombrable d'événements donc est un événement.

$$0 \leq P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}} \text{ donc } \sum_{k \geq 1} P\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ converge et } P(\mathcal{Z}_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}; \text{ on}$$

en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$

- d)  $\mathcal{Z}$  est une intersection dénombrable d'événements donc est aussi un événement. Comme les  $\mathcal{Z}_n$  constituent une suite décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante, on a  $P(\mathcal{Z}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$  donc  $\mathcal{Z}$  est un événement négligeable.

D'autre part, si  $\omega \notin \mathcal{Z}$  alors il existe  $n$  tel que  $\omega \notin \mathcal{Z}_n$ , ie  $\omega \in \overline{\mathcal{Z}_n} = \bigcap_{k \geq n} \left(U_k < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ ; on a donc  $U_k(\omega) < \frac{1}{\sqrt{k}}$

pour tout  $k \geq n$ , ce qui donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\omega) = 0$  (car  $U_n \geq 0$ ). Enfin, comme  $U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ , on en déduit

$$\frac{S_n}{n} \text{ converge vers 0 presque surement}$$