Correction TD20 : Applications dans les espaces vectoriels normés

Exercice 2

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaires qui sont scindés dans $\mathbb{R}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire et de degré d est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^d$.
En déduire que $\mathcal{P}$ est fermé.

2. Soit $T_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est fermé.

b) On souhaite prouver $\overset{o}{T_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$.

i. Montrer que si $A \in T_n(\mathbb{R})$ possède une valeur propre λ telle que $m_\lambda(A) \geqslant 2$ alors il existe une suite (A_k) qui converge vers A telle que $A_k \notin T_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on en conclure sur l'intérieur de $T_n(\mathbb{R})$?

ii. Montrer que si P est unitaire, degré d et n'a pas de racine complexe dans $B(\lambda, \varepsilon)$ alors $|P(\lambda)| \geqslant \varepsilon^d$.

iii. Montrer que l'ensemble des matrices réelles dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$ est ouvert et conclure.

---

1. On factorise P en $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$ (en répétant les éventuelles racines multiples) avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$. On a alors $|P(z)| = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}|z - \alpha_i|$ et $|z - \alpha_i|^2 = (x - \alpha_i)^2 + y^2 \geqslant y^2$ si on décompose z en $z = x + iy$. On a donc $|z - \alpha_i| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|$ et par produit, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^d$.
Si réciproquement on a $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et si $z \notin \mathbb{R}$ alors $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^d > 0$ donc P n'a pas de racine non réelle, ie P est SARS dans $\mathbb{R}$.

Si maintenant (P_k) est une suite de $\mathcal{P}$ qui converge vers Q, on a $P_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_i(k)X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_i X^i$ avec $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} p_i(k) = q_i$ (c'est une suite de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie). Si $z \in \mathbb{C}$, on a alors $P_k(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_i(k)z^i \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{n} q_i z^i = Q(z)$. Comme $P_k \in \mathcal{P}$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P_k(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$ donc, par passage à la limite, on obtient $|Q(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$ donc $Q \in \mathcal{P}$ et $\boxed{\mathcal{P} \text{ est fermé}}$

2. a) Si (M_k) est une suite de matrice TZ dans $\mathbb{R}$ qui converge vers $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(\mathcal{X}_{M_k})$ est une suite de polynômes de $\mathcal{P}$. On a donc, pour $z \in \mathbb{C}$, $|\chi_{M_k}(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$. Par continuité du déterminant, $\mathcal{X}_{M_k}(z) = \det(zI_n - M_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(zI_n - L) = \mathcal{X}_L(z)$. On a donc, par passage à la limite $|\mathcal{X}_L(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$ donc $\mathcal{X}_L \in \mathcal{P}$. Le polynôme caractéristique de L est donc scindé dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que L est TZ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{T_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé}}$

b) i. On TZ A : $A = PTP^{-1}$ avec $T_k = \begin{pmatrix} \lambda & a & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & (0) & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$, on pose $A_k = PT_kP^{-1}$ avec $T_k = T - \dfrac{a}{k}E_{2,1} = \begin{pmatrix} \lambda & a & & & \\ -a/k & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & (0) & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a lors $\mathcal{X}_{A_k} = \mathcal{X}_{T_k} = \left[(X - \lambda)^2 + \dfrac{a^2}{k}\right]\displaystyle\prod_{i=3}^{n}(X - \lambda_i)$ qui n'est donc plus scindé sur $\mathbb{R}$. Si $a = 0$, on fait de même avec $T_k = T + \dfrac{1}{k}E_{1,2} - \dfrac{1}{k}E_{2,1}$ qui ne sera pas TZ dans $\mathbb{R}$.

On déduit de cela que $\overset{o}{T_n}(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$: en effet, si $\mathcal{X}_A$ n'est pas SARS, dans toute boule centrée en A, il y aura tous les termes de la suite (A_k) précédente, à partir d'un certain rang, donc des matrices non TZ.

ii. On factorise P dans $\mathbb{C}$: $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - z_i)$ et, si aucun des z_i n'est dans $B(\lambda, \varepsilon)$ alors $|\lambda - z_i| \geqslant \varepsilon$ donc, par produit $|P(\lambda)| \geqslant \varepsilon^d$.

iii. Soit F le complémentaire des matrices dont le polynôme caractéristique est SARS dans $\mathbb{R}$ et (B_k) une suite de F qui converge vers $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On montre par l'absurde que $\mathcal{X}_L$ ne peut pas être SARS dans $\mathbb{R}$: on suppose donc que $\mathcal{X}_L$ est SARS dans $\mathbb{R}$ et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines complexes distinctes de $\mathcal{X}_L$. On peut trouver $\varepsilon > 0$ de sorte que les boules (dans $\mathbb{C}$) $B(\alpha_i, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes (prendre $\varepsilon < \frac{1}{2} \min i \neq j |\alpha_i - \alpha_j|$, minimum d'un ensemble fini). On va justifier que les polynômes $\mathcal{X}_{B_k}$ possèdent, à partir d'un certain rang, une racine dans chacune des boules $B(\alpha_i, \varepsilon)$; comme ces boules sont disjointes, $\mathcal{X}_{B_k}$ aura, à partir d'un certain rang n racines distinctes complexes. On a vu que $\mathcal{X}_{B_k}(z) \xrightarrow[k\to+\infty]{} Chi_L(z)$ pour tout complexe z donc s'il existe une infinité d'indice k pour lesquels $\mathcal{X}_{B_k}$ n'a pas de racine dans $B(\alpha_i, \varepsilon)$, on peut extraire une suite de $(\mathcal{X}_{B_k})$ pour laquelle on aura $|\mathcal{X}_{B_{\varphi(k)}}(\alpha_i)| \geqslant \varepsilon^n$. Par passage à la limite on aurait $|\mathcal{X}_L(\alpha_i)| \geqslant \varepsilon^n$ ce qui est absurde car $\mathcal{X}_L(\alpha_i) = 0$. Reste à justifier que les racines de $\mathcal{X}_{B_k}$ sont réelles : comme $\mathcal{X}_{B_k}$ est un polynôme à coefficients réels, ses racines complexes sont conjuguées deux à deux. Pour k assez grand, $\mathcal{X}_{B_k}$ possède une racine dans chacune des boules $B(\alpha_i, \varepsilon)$ et α_i est réel donc deux racines de $\mathcal{X}_{B_k}$ ne peuvent pas être conjuguées : si $z \in B(\alpha_i, \varepsilon)$ alors $\overline{z} \in B(\alpha_i, \varepsilon)$ aussi.

On a donc prouvé $L \in F$ donc F est fermé et $\boxed{\text{l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est SARS est un ouvert}}$

On montre alors l'inclusion réciproque de **2.b.i** : par propriété des ouverts, si A est une matrice telle que $\mathcal{X}_A$ est SARS alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon)$ ne contient que des matrices donc le polynôme caractéristique est SARS, elles sont donc DZ dans $\mathbb{R}$ donc dans $T_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $B(A, \varepsilon) \subset T_n(\mathbb{R})$ et $\boxed{\overset{o}{T_n}(\mathbb{R}) \text{ est exactement l'ensemble des matrices donc le polynôme caractéristique est SARS dans } \mathbb{R}}$

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

Soient E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E. On pose $f(t) = \|a + tb\|$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle continue, lipschitzienne ?
2. Si elles existent, calculer $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)$.
3. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R}, a + bt \in B(0, 1)\}$ est un intervalle ouvert ou vide.

---

1. L'inégalité triangulaire est $\Big|\|u\| - \|v\|\Big| \leqslant \|u - v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ donc, avec le côté gauche, $|f(x) - f(y)| \leqslant \|(a + xb) - (x + yb)\| = |x - y| \times \|b\|$ donc $\boxed{f \text{ est } \|b\|\text{-lipschitzienne}}$
2. Toujours avec le même côté de l'inégalité triangulaire, $f(t) \geqslant \Big|\|tb\| - \|a\|\Big| \geqslant |t| \times \|b\| - \|a\| \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} +\infty$ si $b \neq 0$ (si $b = 0$, f est constante)
3. Si $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\|a + (\lambda x + (1 - \lambda)y)b\| = \|\lambda(a + xb) + (1 - \lambda)(a + yb)\| \leqslant \lambda\|a + xb\| + (1 - \lambda)\|a + yb\| \leqslant \lambda + (1 - \lambda) = 1$ donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in I$. Ainsi I est convexe donc comme les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, $\boxed{I \text{ est un intervalle}}$

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

Soit E un evn et $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Montrer que f induit une bijection de E sur $B(0, 1)$.
2. Montrer que f est lipschitzienne, que f^{-1} est continue mais non lipschitzienne.

---

1. On vérifie d'abord que $f(E) \subset B(0, 1)$: $\|f(x)\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$ donc $f(x) \in B(0, 1)$

   Puis on cherche f^{-1} : si $y = f(x)$ alors $\|y\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|}$ donc $(1 + \|x\|)\|y\| = \|x\|$ donc $\|x\| = \dfrac{\|y\|}{1 - \|y\|}$ (on a déjà vu que $1 - \|y\| > 0$). On a donc $y = (1 - \|y\|)x$ puis $x = \dfrac{y}{1 - \|y\|}$. On vérifie réciproquement que $f\left(\dfrac{y}{1 - \|y\|}\right) = y$ si $y \in B(0, 1)$.

   Ainsi f est bijective et $\boxed{f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1 - \|y\|}}$
2. $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\Big\|(x - y) + \|y\|(x - y) + (\|y\| - \|x\|)y\Big\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \leqslant 2\|x - y\| + \dfrac{\|y\|}{(1 + \|y\|)}\|x - y\| \leqslant 3\|x - y\|$.

   Par quotient, f^{-1} est continue par quotient mais non lipschitzienne sinon elle serait bornée sur $B(0, 1)$ car $\|f^{-1}(x)\| = \|f^{-1}(x) - f^{-1}(0)\| \leqslant k\|x - 0\| \leqslant k$ ce qui n'est pas le cas

Exercice 5
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

$$f_1(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}\quad;\quad f_2(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\quad;\quad f_3(x,y)=\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x\quad;\quad f_4(x,y)=x^y$$

---

1. $f_1(x,0)=\dfrac{1}{|x|}\xrightarrow[x\to 0]{}+\infty$ et $f_1(t,-t)=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$ donc f_1 n'a pas de limite en $(0,0)$ (même infinie)

2. $f_2(x,0)=x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et $|f_2(x,y)-0|=\dfrac{|x^3+y^3|}{\|(x,y)\|_2^2}\leqslant\dfrac{|x|^3+|y|^3|}{\|(x,y)\|_2^2}\leqslant\dfrac{\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2}=\|(x,y)\|_2$ donc $\boxed{\lim\limits_{(0,0)}f_2=0}$

3. $D_{f_3}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ donc $(0,0)$ est adhérent à D_{f_3}. Puis $f_3(x,0)=(x^2-1)\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$ et $|f_3(x,y)+1|=(x^2+y^2)\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|+\left|1-\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant x^2+y^2+\left|1-\dfrac{\sin x}{x}\right|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ donc $\boxed{\lim\limits_{(0,0)}f_3=-1}$

4. $f_4(x,y)=e^{y\ln x}$ donc $D_{f_4}=R^{+*}\times\mathbb{R}$ donc $(0,0)$ est adhérent à D_{f_4}. Puis $f_4(x,0)=1\xrightarrow[y\to 0]{}1$ et $f_4\left(x,\dfrac{1}{\ln x}\right)=e\xrightarrow[x\to 0]{}e\neq 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(x,\dfrac{1}{\ln x}\right)=(0,0)$ donc f_4 n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2016)
Soit $H(x,y)=\dfrac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq 0$ et $H(0,0)=0$. H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

H est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ puis si $|y|\leqslant x^2$, on a $|H(x,y)|\leqslant\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{x^2}{\|(x,y)\|_2}\leqslant\|(x,y)\|_2$ alors que si $|y|\geqslant x^2$, on a $|H(x,y)|\leqslant\dfrac{x^4}{|y|\|(x,y)\|_2}\leqslant\dfrac{x^2}{\|(x,y)\|_2}\leqslant\|(x,y)\|_2$ donc H est continue en $(0,0)$

Exercice 8 (Centrale PSI 2023)
Soient $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et φ une forme linéaire sur E. On pose $N=\sup\{|\varphi(f)|, f\in E, \|f\|_\infty\leqslant 1\}$

1. Justifier que N existe si et seulement si φ est continue.

2. Que vaut N si $\varphi(f)=\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$?

3. Existe-t-il $f\in E$ telle que $\|f\|_\infty\leqslant 1$ et $|\varphi(f)|=N$?

---

1. Si N existe alors, pour $f\neq 0$, $\dfrac{f}{\|f\|_\infty}\in B_f(0,1)$ donc $\left|\varphi\left(\dfrac{f}{\|f\|_\infty}\right)\right|\leqslant N$ puis $|\varphi(f)|\leqslant N\|f\|_\infty$ pour $f\neq 0$; ceci reste valable pour $f=0$ aussi donc φ est continue (elle est N-lipschitzienne)
Si φ est continue alors il existe $k\geqslant 0$ tel que $\forall f\in E, |\varphi(f)|\leqslant k\|f\|_\infty$ donc l'ensemble $\{|\varphi(f)|, f\in E, \|f\|_\infty\leqslant 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (contient $|\varphi(0)|=0$) et majoré par k donc N existe.

2. $|\varphi(f)|=\left|\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|\overset{(1)}{\leqslant}\left|\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|\overset{(2)}{\leqslant}\int_{-1}^0|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\overset{(3)}{\leqslant}\|f\|_\infty\left(\int_{-1}^0\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{d}t\right)$ donc $|\varphi(f)|\overset{(4)}{\leqslant}2\|f\|_\infty$ donc $\boxed{\varphi\text{ est continue}}$ et $N\leqslant 2$.
On va voir (cf **3.**) que pour avoir égalité, il faudrait une fonction constante sur $[-1,0[$ et $]0,1]$ de signe opposé sur ces deux intervalle ; une telle fonction e pourrait pas être continue si elle est non nulle donc on « approche » la fonction $f:t\longmapsto\begin{cases}-1 & \text{si } t\in[-1,0[\\ 1 & \text{si } t\in[0,1]\end{cases}$ par une suite (f_n) définie par $f_n(t)=-1$ sur $[-1,0]$, $f_n(t)=-2nt+1$ sur $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ et $f_n(t)=1$ si $t\geqslant\dfrac{1}{n}$ (dessinez là). On a $\|f_n\|_\infty=1$ et $\varphi(f_n)=2-\dfrac{1}{n}$ donc $N=2$

3. Pour une telle fonction, on a, avec l'inégalité (4), $\|f\|_\infty=1$. Puis les inégalité (1), (2) et (3) sont en fait des égalités :
- (3) donne sur $|f|$ est constante sur $]-1,0[$ et $]0,1[$
- (2) donne que f est de signe fixe sur chaque intervalle $]-1,0[$ et $]0,1[$
- (1) donne que les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{f}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de signes opposés

Avec ces 4 conditions, f serait égalé à -1 sur $[-1,0[$ et 1 sur $]0,1]$ (ou l'inverse) donc discontinue en 0. Une telle fonction n'existe donc pas (donc N est une borne supérieure mais pas un maximum).