TD21 : Isométries vectorielles

Exercice 1 **(CCP PSI 2016)**
Soit $a \in E$ non nul, E espace euclidien. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels $u : x \mapsto \alpha < x|a > a - x$ est une isométrie. Reconnaître u pour ces valeurs.

Exercice 2 **(CCP PSI 2016)**

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation autour de $u = (1, 2, 2)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 4 **(ENTPE-EIVP PSI 2013)**
Trouver a, b, c, d tels que $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation *(*)*; préciser ses éléments géométriques.

Exercice 5 **(CCINP PSI 2023)**
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T, A \neq I_2$ et A inversible.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Montrer que $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
4. Calculer $\det(A)$.
5. Déterminer les matrices A.

Exercice 6 **(ENSAM PSI 2015)**

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i,j} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \displaystyle\sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$. *(*)*

Exercice 7 **(ENSAM PSI 2018)**

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$, montrer que $f - id$ et $f + id$ sont bijectifs. *(*)*
2. Montrer que $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$ est une isométrie vectorielle qui n'admet pas -1 pour valeur propre. *(*)*
3. Étudier la réciproque : si g est une isométrie vectorielle qui n'admet pas -1 pour valeur propre, existe-t-il f tel que $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$ et $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$? *(*)*

Exercice 8 **(CCINP PSI 2023)**
Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A^T B$

1. Calculer $A^T B + B^T A$
2. En déduire un polynôme annulateur de C
3. Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\mathrm{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires. *(*)*
4. Montrer $A = B$

Exercice 9 **(CCP PSI 2021)**
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v)^{\perp} = \ker(v)$ où $v = u - id$.
2. Soit $a \in E$ et $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge. *(*)*

Indications

Exercice 4

Trouver c en utilisant une propriété des colonnes des matrices orthogonale ; la troisème colonne est imposée par les deux première pour une rotation.

Exercice 6

penser à $m_{i,j} = (Me_j|e_i)$, Cauchy-Schwarz, les propriétés sur les colonnes d'une matrice orthogonale,...

Exercice 7

1. *Étudier leurs noyaux.*
2. *Pour* $x \in \ker(g + id)$*, changer de variable en posant* $x = y - f(y)$ *et faire tous les calculs avec* y *plutôt que* x*.*
3. *Par analyse/synthèse : déterminer* f *en inversant la relation* $g = (id + f) \circ (id - f)^{-1}$ *puis pour montrer que* f *vérifie la propriété demandée, procéder comme à la question* **2.***, ou montrer que si* u *et* v *commutent et* u *inversible alors* u^{-1} *et* v *commutent aussi.*

Exercice 8

3. *Montrer qu'ils sont orthogonaux.*

Exercice 9

2. *Décomposer* a *en utilisant* $E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$