Correction du DM5

Inspiré de CCP PC 2002 maths 1

Partie I

1. On vérifie que $\boxed{P=(X-1)(2X-1)^2 \text{ est annulateur de } A}$

2. On cherche le reste de la division euclidienne de X^n par P : $X^n = PQ + aX^2 + bX + c$. Avec $X=1$ et $X=\dfrac{1}{2}$, on obtient les équations $1=a+b+c$ et $2^{-n}=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c$; en dérivant, puis avec $X=\dfrac{1}{2}$, on obtient la troisième équation $n2^{1-n}=a+b$. On en déduit $\begin{cases} a=4-(n+1)2^{2-n} \\ b=2^{2-n}-4+6n2^{-n} \\ c=1-n2^{1-n} \end{cases}$ et $A^n=\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1-2n & 2n & 0 \\ -2n & 2n+1 & 0 \\ -2n & 2n+1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$, pour $n\geqslant 1$ (*cette expression n'est pas du tout utile pour calculer la limite*) ou plutôt, en fonction de A^2, A et I_3 : $\boxed{A^n=\left(4-(n+1)2^{2-n}\right)A^2+\left(2^{2-n}-4+6n2^{-n}\right)A+\left(1-n2^{1-n}\right)I_n, \text{ pour } n\geqslant 1}$

3. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 4A^2-4A+I_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ L'endomorphisme associé est un projecteur de rang 1 : c'est le projecteur sur $\text{Vect}\{(0,0,1)\}$ parallèlement au plan $\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$.

4. $\boxed{\mathcal{X}_A(\lambda)=\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2(\lambda-1) \text{ donc } \text{Sp}(A)=\left\{\dfrac{1}{2},1\right\} \text{ et } \rho(A)=1}$

Partie II

1. ψ est une norme (vu en cours) ; on peut aussi dire que ψ est la norme N_∞ sur $\mathbb{C}^{n^2}$ en identifiant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une vecteur de $\mathbb{C}^{n^2}$.
Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\psi(A)=1$ et $\psi\left(A^2\right)=2$ donc $\psi(A)^2<\psi\left(A^2\right)$.

2. a) θ est linéaire donc lipschitzienne et il existe C_A telle que θ soit C_A-lipschitzienne, ie $\boxed{N(AX)\leqslant C_A N(X)}$

b) L'ensemble considéré est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\neq\emptyset$) et majoré par C_A donc $\boxed{\widetilde{N}(A) \text{ existe}}$

3. a) Si $\widetilde{N}(A)=0$ alors $N(AX)=0$ pour tout $X\neq 0$ donc $AX=0$ pour tout X (même nul) donc $A=0$; la réciproque est évidente.

b) Pour $X\neq 0$, on a $\dfrac{N(\lambda AX)}{N(X)}=|\lambda|\dfrac{N(AX)}{N(X)}\leqslant|\lambda|\widetilde{N}(A)$ donc $\boxed{\widetilde{N}(\lambda A)\leqslant|\lambda|\widetilde{N}(A)}$

c) On en déduit, pour $\lambda\neq 0$, $\widetilde{N}(A)=\widetilde{N}\left(\dfrac{1}{\lambda}(\lambda A)\right)\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|}\widetilde{N}(\lambda A$, ce qui donne $\boxed{\widetilde{N}(\lambda A)=|\lambda|\widetilde{N}(A)}$ (qui est valable aussi si $\lambda=0$)

d) Pour $X\neq 0$, on a $\dfrac{N((A+B)X)}{N(X)}\leqslant\dfrac{N(AX)+N(BX)}{N(X)}\leqslant\widetilde{N}(A)+\widetilde{N}(B)$ donc $\boxed{\widetilde{A+B}\leqslant\widetilde{N}(A)+\widetilde{N}(B)}$

e) Si $X\neq 0$ alors $\dfrac{N(AX)}{N(X)}\leqslant\widetilde{N}(A)$ donc $\boxed{N(AX)\leqslant\widetilde{N}(A)N(X)}$ (valable aussi si $X=0$.

f) On vient de prouver que $\widetilde{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; reste à vérifier qu'elle est matricielle : pour tout $X\in\mathbb{C}^n$, on a $N(ABX)\leqslant\widetilde{N}(A)N(BX)\leqslant\widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)X$ donc $\widetilde{N}(AB)\leqslant\widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)$; ce qui justifie bien que $\boxed{\widetilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

4. a) $|(AX)_i|=\left|\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right|\leqslant N_\infty(X)\displaystyle\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\leqslant M_A\|X\|_\infty$ donc $\boxed{N_\infty(AX)\leqslant M_A N_\infty(X)}$

b) Y est choisi de sorte que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|y_i|=1$ et $a_{i_0j}y_j=|a_{i_0j}|$, on a alors $N_\infty(Y)=1$ et, la coordonnée d'indice i_0 de AY est $(AY)_{i_0}=\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i_0j}y_j=M_A$ donc $N_\infty(AY)\geqslant M_A N_\infty(Y)=M_A$ ce qui donne, avec l'inégalité inverse prouvée à la question précédente, $\boxed{\widetilde{N_\infty}(A)=M_A}$

5. Si $\lambda\in\text{Sp}(A)$ alors il existe $X\neq 0$ tel que $AX=\lambda X$. On en déduit $|\lambda|N(X)=N(AX)\leqslant\widetilde{N}(A)N(X)$ donc comme $X\neq 0$, on a $|\lambda|\leqslant\widetilde{N}(A)$. Ceci étant valable pour tout $\lambda\in\text{Sp}(A)$, on a $\boxed{\rho(A)=|\lambda|\leqslant\widetilde{N}(A)}$

6. Si $\lambda\in\text{Sp}(A)$ alors il existe $X\neq O$ tel que $AX=\lambda X$ donc $A^kX=\lambda^kX$ et $\lambda^k\in\text{Sp}(A^k)$ puisque $X\neq 0$. On a donc $0\leqslant\rho(A)^k\leqslant\rho\left(A^k\right)\leqslant\widetilde{N}\left(A^k\right)$ donc si $A^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ alors $\lim\rho(A)^k=0$ ce qui donne $\boxed{\rho(A)<1}$

7. a) fait juste avant !

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, on a alors $\alpha AX = \alpha\lambda X$ donc $\alpha\lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha A)$. De même, si $\alpha \neq 0$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha A)$, il existe $X \neq 0$ tel que $\alpha AX = \lambda X$ donc $AX = \dfrac{\lambda}{\alpha}X$ et $\dfrac{\lambda}{\alpha} \in \mathrm{Sp}(A)$. On en déduit $\mathrm{Sp}(\alpha A) = \{\alpha\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ (ce qui est aussi vrai si $\alpha = 0$ et donc $\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)}$

c) $\rho(A_\varepsilon) = \dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$ donc $A_\varepsilon^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc il existe k_ε tel que $k \geqslant k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(\dfrac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\right) \leqslant 1$.

d) On a donc pour tout $\varepsilon > 0$: $\rho(A) \leqslant \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(A)+\varepsilon$ pour tout entier $k \geqslant k_\varepsilon$ ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = 0}$

Partie III

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. a) $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$ et $0 \leqslant a'_{i,j} \leqslant b'_{i,j}$ donc $0 \leqslant a_{i,k}b_{k,j} \leqslant a'_{i,k}b'_{k,j}$ puis $0 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a'_{i,k}b'_{k,j}$

b) récurrence sur k

c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}$ donc $\widetilde{N_\infty}(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} = \widetilde{N_\infty}(B)$

d) Si $0 \leqslant A \leqslant B$ alors $0 \leqslant A^k \leqslant B^k$ donc $\widetilde{N_\infty}\left(A^k\right) \leqslant \widetilde{N_\infty}\left(B^k\right)$ puis $\left[\widetilde{N_\infty}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\widetilde{N_\infty}\left(B^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, on a $\boxed{\rho(A) \leqslant \rho(B)}$

e) Si $A \neq 0$, il suffit de prendre $c = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \dfrac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$, si $A = 0$, on prend $c = \dfrac{1}{2}$
on a alors $\rho(A) \leqslant \rho(cB) = c\rho(B) < \rho(B)$ car $\rho(B) \neq 0$ (en effet, comme $B > 0$, on a $\mathrm{Tr}(B) > 0$ donc B possède une valeur propre non nulle, la justification de ce dernier point viendra dans le chapitre sur le réduction).