

PSI2. DL février. Mardi 11 mars 2025. Proposition de solution.**Problème n°1.****Partie théorique .**

Il faut faire confiance mais pas trop. La formule donnant la hauteur est forcément fautive à cause de l'AD. Il faut donc la réobtenir.

Trois méthodes :

a) on intègre la formule de la vitesse par rapport au temps. Long et difficile.

b) On dérive la formule de la hauteur par rapport au temps pour voir ce qui ne va pas. Peut-être plus simple.

c) Corriger la formule proposée de la façon la plus simple pour la rendre homogène, ce qui donne :

$$z(t) = u \left\{ t + \left[\frac{M(0)}{q} - t \right] \ln \left[1 - \frac{qt}{M(0)} \right] \right\} - \frac{1}{2} g t^2$$

Et vérifier ou non que cela marche.

La phase de propulsion dure alors $t_p = 64 \text{ s}$, la hauteur atteinte est alors $z_p \approx 56,0 \text{ km}$ *ou* $56,2 \text{ km}$ avec une vitesse $v_p \approx 2580 \text{ m.s}^{-1}$ *ou* 2550 m.s^{-1}

La suite est une chute libre verticale avec vitesse initiale non nulle. Je continue avec une nouvelle origine des temps t' au début de la chute libre. On obtient :

$$\begin{aligned} v(t') &= -gt' + v_p \\ z(t') &= -\frac{g}{2} t'^2 + v_p t' + z_p \end{aligned}$$

La hauteur maximale est obtenue pour une vitesse nulle : $t' = \frac{v_p}{g} \approx 258 \text{ s}$ soit $t \approx 322 \text{ s}$ *ou* 319 s

Et l'altitude correspondante est $h_{max} = z_p + \frac{v_p^2}{2g} \approx 388 \text{ km}$ *ou* 382 km

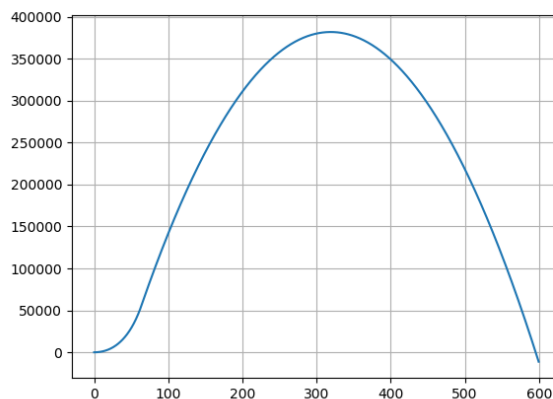
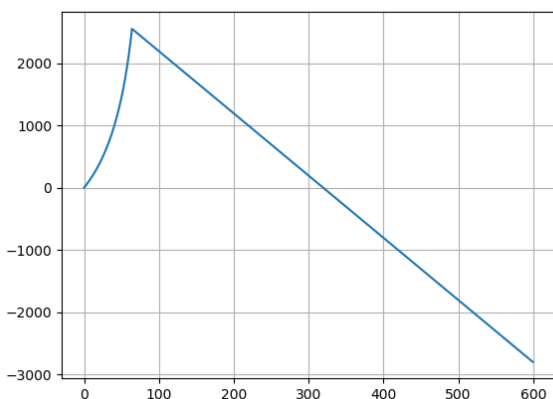
Le retour au point de départ vérifie : $z(t') = 0$ soit $t'^2 - \frac{2v_p}{g} t' - \frac{2z_p}{g} = 0$

Le discriminant est positif donc deux racines réelles. Le produit des deux racines est négatif donc il suffit de sortir la plus grande. On sort :

$$\begin{aligned} t'(z=0) &= \frac{v_p}{g} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{2gz_p}{v_p^2}} \right\} \approx 493 \text{ s} \quad \text{soit } t(z=0) \approx 560 \text{ s} \quad \text{ou } 595 \text{ s} \\ v(t'(z=0)) &\approx -2350 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad -2750 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Vous n'avez plus qu'à comparer avec la simulation sous Python avec 1200 points avec un pas temporel de 0.5 s. Pas trop mal au début.

Les graphes de la vitesse et la hauteur en fonction du temps sont :



Pour la vitesse en chute libre, Euler marche très bien car il n'y a pas d'erreur.

Problème n°2 Partie A.

0) Le volume de la particule de fluide peut éventuellement varier.

$$1) \vec{g} \cdot \overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -gz \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{g} \cdot \overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial(gz)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(gz)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(gz)}{\partial z} = g \end{bmatrix} = \vec{g}$$

2) Cf cours. Le PFD appliquée à la particule de fluide, en supposant le référentiel terrestre galiléen, donne en divisant par la masse de la particule la relation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{g}$$

Avec le formulaire fourni et la question 1, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(P) - \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

On pose : $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$, et on met les gradients ensemble :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

3a) Dans le cas décrit, la formule précédente se simplifie en un simple gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz \right) = \vec{0} \quad \text{valable dans tout le fluide}$$

Donc, la grandeur $P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz$ est constante dans tout le fluide.

On reconnaît l'énergie cinétique volumique, l'énergie potentielle de pesanteur volumique, et on interprète alors P comme étant une énergie volumique. Cette relation est une relation de conservation de l'énergie.

3b) je peux faire monter le fluide dans le champ de pesanteur terrestre à l'aide de pompe, on le fait d'ailleurs couramment. On peut aussi stocker le fluide sous pression, voir par exemple les fusées à eau ou les moteurs à air comprimé.

3c) Si on retire irrotationnel, la formule devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz \right) + \mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Prenons maintenant une ligne de courant. Un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ sur la ligne est parallèle à la vitesse \vec{v} donc perpendiculaire à $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz \right) \cdot d\overrightarrow{OM} + \mu (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \cdot d\overrightarrow{OM} = d \left(P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz \right) + 0 = 0$$

Sur la ligne de courant la grandeur $P + \frac{\mu}{2} v^2 + \mu gz$ ne varie pas donc est une constante. Par contre, si je prends deux lignes de courants différentes, j'obtiens a priori deux constantes différentes.

Problème n°2 Partie B.

1) Pb, la grandeur $v(x, t)$ n'est pas définie. Je décide d'écrire la vitesse du fluide dans le tuyau horizontal sous la forme : $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$.

Comme le fluide est incompressible, la conservation de la matière devient :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 + \mu \text{div}(\vec{v}) = \mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0$$

Donc $v(x, t) = v(t)$: à un instant donné, la vitesse a la même valeur en tout point à l'intérieur du tuyau.

2) On reprend la formule de la question 2 de la partie A en prenant $\mu = \text{cte}$. On obtient :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mu v^2}{2} + \mu gz + P \right) + \mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

On reprend alors le processus de la question 3c.

Prenons maintenant une ligne de courant de M_1 à M_2 . Un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ sur la ligne est parallèle à la vitesse \vec{v} donc perpendiculaire à $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$:

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mu v^2}{2} + \mu g z + P \right) \cdot d\vec{\ell} + \mu (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

soit :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + d \left(\frac{\mu v^2}{2} + \mu g z + P \right) = 0$$

On intègre maintenant de M_1 à M_2 à un instant t :

$$\int_{M_1}^{M_2} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \int_{M_1}^{M_2} d \left(\frac{\mu v^2}{2} + \mu g z + P \right) = \int_{M_1}^{M_2} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \left[\frac{\mu v^2}{2} + \mu g z + P \right]_{M_1}^{M_2} = 0$$

On réorganise tout et on obtient la formule proposée :

$$P(M_2, t) + \frac{\mu}{2} v^2(M_2, t) + \mu g z(M_2) = P(M_1, t) + \frac{\mu}{2} v^2(M_1, t) + \mu g z(M_1) - \mu \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

On fait maintenant : $M_1=A$ et $M_2=B$. $z(A)=h$ et $z(B)=0$.

Les pressions extrêmes sont les mêmes, et on suppose le fluide quasiment immobile dans le réservoir.

$$\int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^L \frac{dv(t)}{dt} \cdot dx = L \frac{dv(t)}{dt}$$

On obtient finalement :

$$v^2 + 2L\dot{v} = 2gh = v_0^2$$

3) Comme cette équation est à variables séparables, on l'écrit maintenant sous la forme différentielle :

$$2L \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = dt \quad \text{soit} \quad \frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)}{1 - \frac{v^2}{v_0^2}} = \left(\frac{v_0}{2L}\right) dt$$

On intègre et on obtient : $\text{Argtanh}\left(\frac{v}{v_0}\right) = \left(\frac{v_0}{2L}\right)t + \text{Cte} = \left(\frac{v_0}{2L}\right)t$ avec les CI

4) La vitesse part de 0 pour atteindre le régime stationnaire $v=v_0$ avec la constante de temps $\tau = \frac{2L}{v_0}$.

En régime permanent, tout se passe comme si l'eau a chuté d'une hauteur h à partir d'une vitesse nulle, ce qui est à un détail près ce qui se passe.

5) Si on ferme rapidement la vanne, l'eau dans le tuyau doit s'arrêter sur un temps très faible, ce qui correspond à une grande accélération en valeur absolue, donc une force exercée par le tuyau sur l'eau très importante donc une force exercée par l'eau sur le tuyau très importante. On peut entendre ce phénomène sur des canalisations anciennes, qu'on appelle coup de bélier.

Reprenons maintenant le dessin avec une interprétation différente : le réservoir et un lac ; le tuyau est une canalisation qui guide l'eau du lac vers un barrage. Si l'ouverture de la vanne ne pose aucun problème, il est hors de question de la fermer rapidement et même de la fermer. Il faut trouver autre chose...

Problème n°3. Extrait centrale 2022 psi.**Q25)** Dans l'approximation acoustique:

- les modifications des champs au repos par l'onde acoustique sont considérées comme des petites perturbations (perturbation du premier ordre) ce qui permet de linéariser les équations physiques par rapport à ces perturbations
- la vitesse particulaire est faible devant la célérité de l'onde, ce qui permet de négliger l'accélération convective dans le calcul de l'accélération des particules de fluide
- on néglige l'influence du poids

On suppose d'autre part que l'évolution d'une particule fluide est adiabatique et réversible, donc isentropique, le fluide étant supposé parfait.

Q26)

- équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

- équation d'Euler (principe fondamental de la dynamique pour une particule fluide soumise aux seules forces de pression, en projection sur l'axe z)

$$\rho \vec{a} = -\vec{\text{grad}}P \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

- compressibilité du fluide en évolution isentropique

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \rightarrow \chi_{s0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$$

Q27) L'expression de la compressibilité isentropique permet d'exprimer μ

$$\mu = \rho_0 \chi_{s0} p$$

soit en reportant dans l'équation de conservation de la masse une équation couplée entre p et v

$$\rho_0 \chi_{s0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

L'équation d'Euler linéarisée constitue une seconde équation couplée entre p et v , qui conduit à l'équation vérifiée par la surpression acoustique

- dérivation par rapport au temps de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \chi_{s0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \chi_{s0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} = 0$$

- dérivation par rapport à z de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

- utilisation du théorème de Schwartz

$$\rho_0 \chi_{s0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Q28) On obtient une équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho_0 \chi_{s0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

de célérité

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{s0}}}$$

Pour l'eau de mer, $\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\chi_s = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, et

$$c_0 = 1,55 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q29) La norme du vecteur d'onde ne dépend que du milieu de propagation, identique pour l'onde incidente et l'onde réfléchie, donc $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\|$.

$$k_i = \frac{\omega}{c_1}; k_t = \frac{\omega}{c_2}$$

Q30) La continuité de la pression à l'interface $P(x, y, 0^-, t) = P(x, y, 0^+, t)$ s'écrit $P_0 + p_i(x, y, 0^-, t) + p_r(x, y, 0^-, t) = P_0 + p_t(x, y, 0^-, t)$, soit en exprimant les surpressions et en passant en notation complexe

$$\underline{p}_{i0} \exp \left(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP}) \right) + \underline{p}_{r0} \exp \left(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OP}) \right) = \underline{p}_{t0} \exp \left(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OP}) \right)$$

puis, après division par le facteur $\exp \left(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP}) \right)$

$$\underline{p}_{i0} + \underline{p}_{r0} \exp \left(i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overrightarrow{OP} \right) = \underline{p}_{t0} \exp \left(i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overrightarrow{OP} \right)$$

Q31) Les fonctions exponentielles étant linéairement indépendantes, la relation précédente est vérifiée pour \underline{p}_{i0} , \underline{p}_{r0} et \underline{p}_{t0} non nuls et un point P de l'interface arbitraire si ces fonctions sont identiques, donc si leurs arguments le sont :

$$0 = (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overrightarrow{OP} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overrightarrow{OP}$$

en notant que $1 = \exp(0)$

Q32) On exprime les vecteurs d'onde et le vecteur $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans les relations précédentes :

$$(k_{i,x} - k_{r,x})x - k_{r,y}y = 0; (k_{i,x} - k_{t,x})x - k_{t,y}y = 0$$

Ces relations doivent être vérifiées pour tout x et y , d'où les relations

$$k_{r,y} = k_{t,y} = 0; k_{r,x} = k_{t,x} = k_{i,x}$$

Les vecteurs d'onde des ondes réfléchi et transmise sont contenus dans le plan d'incidence (\vec{k}_i, \vec{e}_z) car leurs composantes selon \vec{e}_y sont nulles

D'après la figure 5

$$k_{i,x} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i; k_{r,x} = k_r \sin (\pi + \theta_r) = -\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_r; k_{t,x} = k_t \sin \theta_t = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t$$

d'où les relations

$$\sin \theta_i = -\sin \theta_r : \theta_r = -\theta_i ; \frac{\sin \theta_t}{c_2} = \frac{\sin \theta_i}{c_1}$$

Qui constituent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.