TD22 : Endomorphismes autoadjoints

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale

Exercice 2 (CCP PSI 2017)
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de $M^T M$, en déduire son spectre, puis que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.
3. Trouver M.

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left(M^T M\right)^2 = I_n$.

1. À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.
2. En déduire que M est symétrique.
3. Conclure que $M = I_n$.

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$ et $MM^T = M^T M$. On pose $\Omega = M^T M$

1. Calculer M^4 et Ω^4
2. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. On suppose $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ avec $n = 2p$. *(*)*

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle ; montrer que $\dfrac{(\mathrm{Tr}\, A)^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}(A)$. *(*)*

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2022)
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) > 0$.
2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.
3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\mathrm{Tr}(SS') > 0$. *(*)*

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$, $(\,|\,)$ désignant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque. *(*)*

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de valeurs propres $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}, R_A(X) = \dfrac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], Ae_i = \lambda_i(A)e_i$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \setminus \{0\}, R_A(X) \in [\lambda_1(A), \lambda_k(A)]$
2. Montrer que : $\lambda_k(A) = \min\limits_{V \in G_k} \left(\max\limits_{X \in V \backslash \{0\}} R_A(X) \right)$ *(*)*
3. Soient A et B deux matrices symétriques réelles. En déduire que $\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A + B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B)$.

Indications

Exercice 4

3. *Vérifier que M est orthogonale (ie $\Omega = I_n$) puis antisymétrique. Pour trouver P, construire par récurrence une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_k)$ de sorte que $(e_1, \ldots, e_k, Me_1, \ldots, Me_k)$ soit orthonormale (donc en prenant $e_{k+1} \in \mathrm{Vect}\{(e_1, \ldots, e_k, Me_1, \ldots, Me_k)\}^\perp$)*

Exercice 5

Calculer avec les valeurs propres de A plutôt que ses coefficients.

Exercice 6

3. *Montrer que SS' est semblable à une matrice de $\mathcal{E}$.*

Exercice 7

- $\star$ *Si U et V non inversible, montrer* $\mathrm{Sp}(U+V) \subset \mathbb{R}^+$.
- $\star$ *Dans le cas V inversible, écrire $V = MM^T$ et se ramener au cas $V = I_n$.*

Exercice 8

2. *Commencer par justifier l'existence de $\max\limits_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X)$ en remarquant $R_A(X) = R_A\left(\dfrac{X}{\|X\|}\right)$ et le théorème des bornes atteintes.*

Vérifier ensuite que si $V \in G_k$, il existe $X \neq 0$ dans $V \cap \mathrm{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}$ puis que $R_A(X) \geqslant \lambda_k(A)$ pour un tel vecteur.