I Limites et continuité

Exercice 1 *[Solution]*
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

$$f_1(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad ; \quad f_2(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_3(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$$

$$f_4(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_5(x,y)=\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x \quad ; \quad f_6(x,y)=x^y \quad ; \quad f_7(x,y)=\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $H(x,y)=\dfrac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq 0$ et $H(0,0)=0$. H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
indication : oui ; majorer différemment selon que $|y|\leqslant x^2$ ou $|y|\geqslant x^2$.

II Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Exercice 3 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=(x+y)^p\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

1. La fonction f a-t-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?
2. Pour quelles valeurs de p, f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. Pour quelle valeur de p la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y=0\}$ et $f:(x,y)\longmapsto\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } (x,y)\notin F\\ 0 & \text{si } (x,y)\in F\end{cases}$

1. Justifier que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus F)$
2. Montrer que, si $(x,y)\notin F$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$
3. Existence et valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?
4. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6 **(CCP MP 2006)** *[Solution]*
On pose $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
On pose $H(x,y)=\dfrac{x^4y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $H(0,0)=0$. H est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Exercice 9 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 **(ENSEA PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3-x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11 *[Solution]*
Étudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions :

$$f_1(x,y) = \sup\{|x|,|y|\} \quad ; \quad f_2(x,y) = |x|+|y| \quad ; \quad \begin{cases} f_3(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f_3(0,0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 *[Solution]*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, calculer les dérivées (ou les dérivées partielles) des fonctions suivantes en fonction des dérivées de f :

$$g_1(x,y) = f(y,x) \quad ; \quad g_2(x) = f(x,x) \quad ; \quad g_3(x,y) = f(y, f(x,x)) \quad ; \quad g_4(x) = f(-x, f(x,x^2))$$

Exercice 13 **(Mines-Ponts MP 2011)** *[Solution]*
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; déterminer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,2x)$.

Exercice 14 *[Solution]*
Soit f définie par : $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$
Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 15 **(Mines-Ponts MP 2009)** *[Solution]*
Montrer que $l : x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|_2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $E\setminus\{0\}$ et calculer sa différentielle en $x \neq 0$.

Exercice 16 *[Solution]*
Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est définie et admet des dérivées partielles sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

Exercice 17 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f

Exercice 18 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $u_n(a,x) = \dfrac{x^n}{n+a}$ et $F(a,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a,x)$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n+a}$ pour a fixé.

2. Montrer que $|u_n(a,x)-u_n(a',x)|\leqslant\dfrac{|(a-a')|}{n^2}$, si $|x|<1$, et en déduire que F est continue.
indication : majorer $|F(a,x)-F(a',y)|$ en introduisant $F(a',x)$

3. $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ existe-t-elle ? Est-elle continue ?
indication : prendre $x\in[-\alpha,\alpha]\subset]-1,1[$

4. $\dfrac{\partial F}{\partial a}$ existe-t-elle ? Est-elle continue ?
indication : $(a,a')\in[0,A]$ pour la continuité

Exercice 19 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*
Soit $f:(x,y)\mapsto\arctan x+\arctan y-\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts « simples ».

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3. Simplifier f.

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

2. Montrer que ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)=\displaystyle\int_0^1 f(x,P(x))\,\mathrm{d}x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle.

III Équations aux dérivées partielles

Exercice 21 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
Trouver les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ telles que $\forall(x,y)\neq(0,0),\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p$, $p\in\mathbb{N}$, où $g(x,y)=f(x^2+y^2)$.

Exercice 22 **(Centrale PC 2011)** *[Solution]*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

1. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}$ (on pourra utiliser deux intégrales).

2. Montrer que $\phi:r\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on se placera sur $[-R,R]$ et on utilisera $M_R=\displaystyle\sup_{x^2+y^2\leqslant R}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$)

3. Montrer que $r\phi'(r)=0$ et conclure que ϕ est constante.
indication : introduire g et passer en polaires.

4. Que dire de $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$?

Exercice 23 *[Solution]*
Résoudre en polaires $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ et $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 24 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}-f=-(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\in\mathbb{R}^-\}$ (on pourra passer en coordonnées polaires).

Exercice 25 *[Solution]*
Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ par $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{y}{x^3}$.

Exercice 26 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Montrer que $\phi : (x,y) \mapsto (x^2+y^2, x+y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ sur $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 2u - v^2 > 0\}$; vérifier que ϕ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et g telle que $f = g \circ \phi$. Montrer que f vérifie $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y^2-x^2)f(x,y)$ si et seulement si g vérifie une équation aux dérivées partielles à déterminer.
3. Résoudre cette dernière équation et trouver f.

Exercice 27 **(CCP PC 2009)** *[Solution]*
Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$. (on pourra, après en avoir justifié la légitimité, utiliser le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$).

Exercice 28 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 g(x,y) + \partial_2 g(x,y) = 0$. On pose $h(u,v) = g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
1. Calculer $\partial_1 h(u,v)$
2. Trouver (α, β) tels que $h(u,v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
3. Déterminer g

Exercice 29 **(Centrale PSI 2010)** *[Solution]*
Résoudre $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant un changement de variable du type $u = ax + by$, $v = cx + dy$.

Exercice 30 **(ENSEA-ENSIIE MP 2014)** *[Solution]*
Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$; on pourra poser $u = x+y$, $v = x-y$.

Exercice 31 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (on pourra utiliser un changement de variable linéaire).

Exercice 32 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; on pourra utiliser le changement de variable $u = x + ay$ et $v = x + by$

Exercice 33 **(CCP PC 2011)** *[Solution]*
Soit E_a l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\forall t > 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(tx,ty,tz) = t^a f(x,y,z)$.
1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.
3. Montrer que si $f \in E_0$ alors $f(x,y,z) = f(0,0,0)$. Que peut-on en déduire sur E_0 ?
4. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = af(x,y,z)$.
   Montrer que $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f(tx,ty,tz) - t^a f(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie $tg'(t) = ag(t)$. En déduire que $f \in E_a$.
   La réciproque est-elle vraie ?

IV Extrema

Exercice 34 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*
1. Montrer que $f : (x,y) \mapsto x^3 + \ln(4+y^2)$ admet un unique point critique.
2. Déterminer un équivalent en 0 de $f(x,x^2) - f(0,0)$; f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 35 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^2 y + \ln(4+y^2)$

Exercice 36 **(EIVP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $g(x,y) = (x^2-y)(3x^2-y)$. Montrer que $x \mapsto g(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. g admet-elle un minimum local en $(0,0)$?

Exercice 37 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Etudier les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.

Exercice 38 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Etudier les extrema de $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$.

Exercice 39 **(CCP MP 2015)** *[Solution]*
Etudier les extrema de $f:(x,y)\mapsto x^2+(y^3-y)^2$.

Exercice 40 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
$f:(x,y)\mapsto xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}$ admet-elle des extrema locaux sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$?

Exercice 41 **(CCP PC 2012)** *[Solution]*
Déterminer, s'ils existent, les extremums absolus de $f(x,y)=(x+y)^2-xy$ sur le domaine $D=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2, x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

Exercice 42 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Extrema globaux puis locaux de $f(x,y)=x^4y^3+\ln(1+y^4)$ sur $[-1,1]^2$.

Exercice 43 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leqslant 1\}$ et g la fonction définie sur D par $g(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } 0<x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1. Montrer que g est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\overset{o}{D}$.
2. Montrer que g admet des extremums globaux sur D.
3. A-t-on extremum local en $(0,0)$? Donner les extremums locaux ou globaux sur le bord de D.

Exercice 44 **(ENTPE-EIVP PSI 2015)** *[Solution]*
Extrema de $f(x,y)=xy\sqrt{1-x-y}$ sur $T=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2, x+y\leqslant 1\}$?

Exercice 45 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $D=(\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

1. Montrer que f est continue sur D.
   indication : Distinguer $x\geqslant y$ et $y\geqslant x$.
2. Montrer que f est majorée sur D.
3. Soit $K=[0,10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D.
4. Déterminer $\max\limits_D(f)$.

Exercice 46 **(Centrale PSI 2017)** *[Solution]*
Soient $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$ et $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \max(x,y)\leqslant 2, \min(x,y)\geqslant -2\}$
1. f admet-elle des extrema sur A ?
   En quels points les extremas locaux peuvent-ils être atteints ?
2. Etudier $f(x,x)$ et $f(x,-x)$; que peut-on en déduire ?
3. Donner les extrema locaux de f sur A puis sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 47 **(CCP PC 2009)** *[Solution]*
Soit $\left(A,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan, R un réel strictement positif, O et O' les points définis par $\overrightarrow{AO}=R\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{AO'}=-R\overrightarrow{i}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles de rayon R et de centre respectifs O et O'. Soient a et b deux réels de $[0,\pi]$, M le point de $\mathcal{C}$ tel que l'argument de l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est a et M' le point de $\mathcal{C}'$ tel que l'affixe de $\overrightarrow{O'M'}$ est b.
1. Déterminer les affixes de M et M' et montrer que l'aire du triangle AMM' est :
   $S=\dfrac{R^2}{2}(\sin(b)(1+\cos(a))+\sin(a)(1-\cos(b)))$.
2. On note $f:(x,y)\mapsto\sin(y-x)+\sin(x)+\sin(y)$.
   Justifier l'existence de $(\alpha,\beta)\in[0,\pi]^2$ tel que $\forall(x,y)\in[0,\pi]^2, f(x,y)\leqslant f(\alpha,\beta)$.
3. Montrer que $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0,\pi[^2$.
4. Déterminer l'aire maximale de AMM'.

Exercice 48 **(CCP PC 2007)** *[Solution]*
On définit $\sin(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
1. Montrer que f définie par $f(x,y)=|\sin(x+iy)|^2$ admet un maximum et un minimum sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leqslant 1\}$.
   Quel est le minimum ?

2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.

3. Trouver les points critiques de f sur $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$.

4. Montrer qu'il existe θ_0 tel que le maximum de f sur D soit $f(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

5. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{sh}(t) \geqslant t$ et $\sin(t) \leqslant t$.

6. Montrer que $g : \theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donner le maximum de f.

Exercice 49 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

1. Déterminer le gradient de f aux points $(1,1)$ et $(1,2)$; en déduire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ aux points $(1,1,f(1,1))$ et $(1,2,f(1,2))$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, 2x^2)$. La fonction f admet-elle des extremums globaux ?

3. Déterminer le signe de $f(x, ax)$ et $f(0,y)$ lorsque x et y sont proches de 0, pour $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 50 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On suppose que f admet un extremum local en a. Que peut-on en déduire ?
   Montrer que ce n'est plus le cas si on ne suppose plus U ouvert.

2. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (ax + by)e^{-(x^2+y^2)}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le gradient et les points critiques de f

3. Étudier les extrema locaux et absolus de f.
   indication : commencer par vérifier que f admet des extrema absolus en regardant la limite de f quand $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 51 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ symétrique, de valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, (f(x)|x) > 0$.

2. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit g par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que g admet des dérivées partielles et les expliciter.

3. Montrer que g admet un unique point critique et que ce point critique est un minimum global.

V Applications à la géométrie

Exercice 52 *[Solution]*
Soit S la surface d'équation $xy = z$ et D la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right.$.

1. La surface S est-elle régulière ?

2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient D.

Exercice 53 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*

1. Déterminer une équation du plan tangent P_0 à la surface d'équation $xyz = 1$ au point (x_0, y_0, z_0).

2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur P_0.

Exercice 54 **(Centrale PC 2010)** *[Solution]*
Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; trouver l'ensemble Γ des points de S où la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array}\right.$ est parallèle au plan tangent à S.

Exercice 55 *[Solution]*
Soit S la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Montrer que S est une surface régulière.

2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à xOy.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** $|f_1(x,y)| \leqslant |x+y|$ donc $\lim\limits_{(0,0)} f_1 = 0$

2. $f_2(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $f_2(0,y) \xrightarrow[y\to 0]{} -1$ donc pas de limite en $(0,0)$

3. $f_3(x,0) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc pas de limite en $(0,0)$.

4. $|f_4(x,y)| \leqslant \dfrac{2N_2(x,y)^3}{N_2(x,y)^2} = 2N_2(x,y)$ donc $\lim\limits_{(0,0)} f_4 = 0$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{(0,0)} f_5 = -1$

6. $f_6(x,y) = e^{y\ln(x)}$ donc f_6 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et $f_6(x,0) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ et $f_6\left(t, \dfrac{1}{\ln t}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} e$ donc pas de limite en $(0,0)$.

7. $|\sin(u)| \leqslant |u|$ donc $|f_7(x,y)| \leqslant \dfrac{N_2(x,y)^2}{N_2(x,y)}$ et $\lim\limits_{(0,0)} f_7 = 0$

Exercice 2 *[sujet]* H est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis si $|y| \leqslant x^2$, on a $|H(x,y)| \leqslant \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{x^2}{N_2(x,y)} \leqslant N_2(x,y)$ alors que si $|y| \geqslant x^2$, on a $|H(x,y)| \leqslant \dfrac{x^4}{|y|N_2(x,y)} \leqslant \dfrac{x^2}{N_2(x,y)} \leqslant N_2(x,y)$ donc H est continue en $(0,0)$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $|f(x,y)| \leqslant N_2(x,y)$

2. $f(x,0) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) \xrightarrow[y\to 0^+]{} 1$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $|f(x,y)| \leqslant |x+y|^p \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ car $p \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$

2. $\dfrac{1}{x} f(x,0) = x^{p-1}\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ pour $p \geqslant 2$ et n'existe pas pour $p = 1$.

3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = p(x+y)^{p-1}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{2x(x+y)^p}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant p|x+y|^{p-1} + \dfrac{2^{p+1}N_2(x,y)^{p+1}}{N_2(x,y)^3}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ pour $p \geqslant 3$ alors que si $p = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc pas de limite en $(0,0)$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** th généraux

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x+y} - \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$

3. $\dfrac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

4. $f(x, -x+x^6) = \dfrac{(-1+x^5)^2}{x^2}$ donc f n'est pas bornée au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 6 *[sujet]* $f(x,0) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 4N_2(x,y)$ donc est continue en $(0,0)$.

Exercice 7 *[sujet]* $H(x,0) = 0$ donc $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 4N_2(x,y)^2 + 2N_2(x,y)^2$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.
$H(0,y) = 0$ donc $\dfrac{\partial H}{\partial y}(0,0) = 0$ et $\left|\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant N_2(x,y)^2 + 2N_2(x,y)^2$ donc $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{x^3+y^3}{N_2(x,y)^2} \leqslant 2N_2(x,y)$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ alors que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)$ donc cette limite n'existe pas.

Exercice 9 *[sujet]* fait en cours; on trouve $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ donc, par le théorème de Schwarz (contraposée), on en déduit que f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur R^2.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** quotient

2. facile : commencer par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 3$ donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert) d'après le th de Schwarz

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $f_1(x,0) = |x|$ n'est pas dérivable en 0

2. $f_2(x,0) = |x|$ idem

3. $f_3(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ donc $\dfrac{1}{x} f_3(x,0) \to \begin{cases} +1 & \text{si } x \to 0^+ \\ -1 & \text{si } x \to 0^- \end{cases}$ donc pas dérivée partielle selon x en $(0,0)$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ et $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

2. $g_2'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$

3. $\dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) = g_2'(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, f(x,x))$ et $\dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y, f(x,x))$

4. $g_4'(x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(-x, f(x,x)) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x^2) + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}(-x, f(x,x^2))$

Exercice 13 *[sujet]* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,2x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,2x) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,2x)$

Exercice 14 *[sujet]* $f(x,0) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ mais $f(t,t^2) = \dfrac{1}{2}$ si $t \neq 0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 15 *[sujet]* $l(x+h) = \dfrac{x+h}{\sqrt{\|x\|^2 + 2(x|h) + o(h)}} = \dfrac{1}{\|x\|}(x+h)\left(1 + \dfrac{(x|h)}{\|x\|^2} + o(h)\right) = l(x) + \dfrac{h}{\|x\|} + \dfrac{(x|h)}{\|x\|^3}x + o(h)$; $h \mapsto \dfrac{h}{\|x\|} + \dfrac{(x|h)}{\|x\|^3}x$ est linéaire donc c'est $\mathrm{d}l(x)$.

On a ensuite $\dfrac{\partial l}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}l(a).e_i = \dfrac{e_i}{\|a\|} + \dfrac{a_i}{\|a\|^3}x$ qui est continue pour $a \neq 0$ donc l est $\mathcal{C}^1$

Exercice 16 *[sujet]* $|u_n(x,y)| \leqslant \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ donc f est définie sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

f est une série entière par rapport à la variable x avec $R \geqslant 1$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\cos(ny)x^{n-1}$

Par rapport à y, on applique le théorème de dérivation avec $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \sqrt{n}|x|^{n-1}$ (indépendant de y) donc CN sur $\mathbb{R}$ si $|x| < 1$.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** Si $|y| > 1$ alors $f_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $\left|\dfrac{x}{y}\right| < 1$; $f_n(x,\pm 1) = \dfrac{x^{2n}}{2}$ donc CV si et seulement si $|x| < 1 = |y|$; enfin, si $|y| < 1$ alors $f_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $|x| < 1$. Au final $D =]-1,1[^2 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |y| \geqslant 1, |x| < |y|\}$

2. Par rapport à la variable x, $x \mapsto f(x,y)$ est une série entière donc $\mathcal{C}^\infty$. Par rapport à y, c'est une série de fonctions donc on applique le th de dérivation avec $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| = 2n\dfrac{|y|^{2n-1}x^{2n}}{(1+y^{2n})^2}$. On étudier le cas $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ par exemple : si $|x| < 1$ et $0 \leqslant y \leqslant a$ alors $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2nx^{2n}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^+$; si $|x| \geqslant 1$ et $y \in [a,+\infty[$ avec $a > x$ (cf D), alors $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2n\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n}$ donc CVNTS de $]x,+\infty[$. Au final f admet des dérivées partielles en tout point de D.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** $R=1$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\times]-1,1[$.

2. $|u_n(a,x)-u_n(a',x)| = \left|\dfrac{(a'-a)x^n}{(n+a)(n+a')}\right| \leqslant \dfrac{|a-a'|}{n^2}$ car $a>$ et $a'>0$. On a $|F(a,x)-F(a,y)| \leqslant |F(a,x)-F(a',x)| + |F(a',x)-F(a',y)| \leqslant |a-a'|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + |F(a',x)-F(a',y)| \xrightarrow[(a,x)\to(a',y)]{} 0$ car $|a-a'|\to 0$ et par continuité de la série entière sur $]-1,1[$, $\lim\limits_{x\to y} F(a',x) = F(a',y)$.

3. Série entière donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n+a}$. On prouve la continuité de même sur $[-\alpha,\alpha]\times\mathbb{R}^{+*}$ avec $\left|\dfrac{nx^{n-1}}{n+a}-\dfrac{nx^{n-1}}{n+a'}\right| \leqslant \dfrac{\alpha^{n-1}}{n}|a-a'|$ et $\sum \dfrac{\alpha^{n-1}}{n}$ CV car $\alpha\in[0,1[$.

4. Série de fct cette fois $\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+a)^2}$ (car $\left|\dfrac{x^n}{(n+a)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc CVN). La continuité s'obtient encore de la même façon avec $\left|\dfrac{x^n}{(n+a)^2}-\dfrac{x^n}{(n+a')^2}\right| \leqslant \dfrac{(2n+a+a')|a-a'|}{n^4} \leqslant \dfrac{2(n+A)}{n^4}|a-a'|$ et le reste ne change pas car $\sum\dfrac{n+A}{n^4}$ CV.

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $D_f = \{(x,y), xy\neq 1\} = \{xy>1\}\cup\{|xy|<1\}\cup\{xy<-1\}$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

3. f est constante sur les trois ouverts (convexes) : $f=\pi$ sur $\{xy>1\}$; $f=0$ sur $\{|xy|<1\}$ et $f=-\pi$ sur $\{xy<-1\}$

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-0\right| \leqslant \dfrac{3x^2|y|}{N_2(x,y)^2}+\dfrac{2x^4|y|}{N_2(x,y)^4} \leqslant 5N_2(x,y)$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-0\right| \leqslant 3N_2(x,y)$ donc f est $\mathcal{C}^1$

2. En fait il faut comprendre que c'est plutôt $\phi(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mapsto\displaystyle\int_0^1 f(x,P(x))\,\mathrm{d}x$ avec $P=\displaystyle\sum_{i=0}^n x_iX^i$ pour respecter le programme. On a $f(x,y+h) \underset{h\to 0}{=} f(x,y)+h\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+o(h)$ donc pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que si $|h|<\eta$ on a $\left|f(x,y+h)-f(x,y)-h\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant\varepsilon|h|$; comme si $H\in\mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\|H\|_{\infty,[0,1]}\leqslant\eta$, on a $|H(x)|\leqslant\eta$ donc $\left|f(x,P(x)+H(x))-f(x,P(x))-H(x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,P(x))\right|\leqslant\varepsilon\|H\|_\infty$ donc $\left|\phi(P+H)-\phi(P)-\displaystyle\int_0^1 H(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,P(x))\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\|H\|_\infty$. Comme $H\mapsto\displaystyle\int_0^1 H(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,P(x))\,\mathrm{d}x$ est linéaire, on en déduit $\mathrm{d}\phi(P).H=\displaystyle\int_0^1 H(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,P(x))\,\mathrm{d}x$ puis $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}=\mathrm{d}\phi(P).X^i=\displaystyle\int_0^1 x^i\frac{\partial f}{\partial y}(x,P(x))\,\mathrm{d}x$. Reste la continuité de ces dérivées partielles : f est $\mathcal{C}^1$ donc, pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que si $U\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\|U\|_\infty\leqslant\eta$ alors $\|(P+U)-P\|_\infty\leqslant\eta$ donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,P(x)+U(x))-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,P(x))\right|\leqslant\varepsilon$ et en intégrant $\left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}(P+U)-\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}(P)\right|\leqslant\varepsilon\displaystyle\int_0^1 x^i\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon$ donc $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$ est continue et ϕ est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 21 *[sujet]* $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$; on doit donc avoir $4f'(t)+4tf''(t)=t^p$ pour $t>0$. On trouve $f(t)=\alpha\ln(t)+\beta+\dfrac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$

Exercice 22 *[sujet]* **1.** On intègre $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ donc on pose $g(x,y)=\displaystyle\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t+\varphi(x)$; si y est fixé et $x\in[\alpha,\beta]$, par continuité de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur le fermé borné $[\alpha,\beta]\times[0,y]$, on a $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant C$ (intégrable sur le segment $[0,y]$) donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\displaystyle\int_0^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t+\varphi'(x)=-\int_0^y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)\,\mathrm{d}t+\varphi'(x)=-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right]_{t=0}^{t=y}+\varphi'(x)$; il suffit donc de prendre ensuite $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)\,\mathrm{d}t$.

2. Si $h(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ alors $\left|\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)\right|\leqslant M_R$ qui existe par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur le fermé borné $B_f((0,0),R)$ (intégrable sur $[0,2\pi]$) donc $\phi'(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

3. Avec **1**, on a $r\phi'(r) = \int_0^{2\pi} r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[g(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$
ϕ' est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}$ par continuité en 0. $\phi(r) = \phi(0) = 2\pi f(0,0)$

4. $= 2\pi f(a,b)$ de la même façon

Exercice 23 *[sujet]* $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

1. $r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ donc $g(r,\theta) = \alpha(r)$ et $f(x,y) = \beta(x^2+y^2)$ ($\beta(t) = \alpha(\sqrt{t})$

2. $r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ donc $g(r,\theta) = r + \alpha(\theta)$

Exercice 24 *[sujet]* $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$; $r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ donc $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - g(r,\theta) = -r^2$ puis $g(r,\theta) = \alpha(\theta)r - r^2$.

Exercice 25 *[sujet]* $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}\left[2\left(\frac{y}{x}\right)f'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)f''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$ donc $f''(t) + \frac{2t}{t^2-1}f'(t) = \frac{t}{t^2-1}$ et on trouve $f(t) = \alpha\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \beta + \frac{t}{2}$ sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]-1,1[$ ou sur $]1,+\infty[$. Au final $f(t) = \beta + \frac{t}{2}$ sur $\mathbb{R}$ (recollement)

Exercice 26 *[sujet]* **1.** $\left\{\begin{array}{l} u = x^2+y^2 \\ v = x+y \end{array}\right.$ si et seulement si x et y sont les racines de $2X^2 - 2vX + v^2 - u$; ses deux racines sont réelles et distinctes si et seulement si $2u - v^2 > 0$; on a alors (avec $x > y$) $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{v+\sqrt{2u-v^2}}{2} \\ y = \dfrac{v-\sqrt{2u-v^2}}{2} \end{array}\right.$ donc ϕ^{-1} est aussi $\mathcal{C}^1$

2. $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y-x)\frac{\partial g}{\partial v}(x^2+y^2, x+y)$ donc f est solution si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2vg(u,v)$

3. $g(u,v) = \alpha(u)e^{v^2}$ et $f(x,y) = \alpha(x^2+y^2)e^{(x+y)^2}$ avec α $\mathcal{C}^1$

Exercice 27 *[sujet]* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible donc le changement de variable est bijectif (la réciproque est aussi linéaire donc $\mathcal{C}^1$) ; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y)$ donc $\frac{\partial g}{\partial u} = g$, $g(u,v) = \alpha(v)e^u$ et $f(x,y) = \alpha(u-y)e^{x+y}$ avec α $\mathcal{C}^1$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $\partial_1 h(u,v) = \alpha\partial_1 g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v) + \beta\partial_2 g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$

2. Si $\alpha = \beta = 1$, on a $\partial_1 h(u,v) = 0$ donc $h(u,v) = \varphi(v)$

3. $(u,v) \mapsto (u+v, u-v)$ est bien bijectif ; $v = \frac{x-y}{2}$ donc $g(x,y) = \psi(x-y)$ avec $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 29 *[sujet]* Si $u = x$ et $v = x + 2y$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (la réciproque est linéaire donc $\mathcal{C}^1$ aussi) ; $2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\frac{\partial g}{\partial u}(x, x+2y)$ donc $g(u,v) = \alpha(v)$ et $f(x,y) = \alpha(x+2y)$ avec α $\mathcal{C}^1$.

Exercice 30 *[sujet]* $f(x,y) = g(x+y, x-y)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x+y, x-y)$ (par Schwarz) donc $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = \frac{u^2-v^2}{4}$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{16}\left(\frac{u^3}{3} - uv^2 + \alpha(v)\right)$ et $g(u,v) = \frac{1}{16}\left(\frac{u^3}{3}v - u\frac{v^3}{3} + \beta(v) + \gamma(u)\right)$ avec β et γ $\mathcal{C}^1$ ($\beta' = \alpha$)

Exercice 31 *[sujet]* Si $f(x,y) = g(x+ay, x+by)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (1-a)(1-2a)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+ay, x+by) + (2-3(a+b)+4ab)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x+ay, x+by) + (1-b)(1-2b)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+ay, x+by)$; on peut donc choisir $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ est inversible (la réciproque est linéaire donc $\mathcal{C}^2$) et on a $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$ donc $g(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$ avec α et β $\mathcal{C}^2$.

Exercice 32 *[sujet]* Le changement est bijectif de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a \neq b$. On pose $f(x,y) = g(x+ay, x+by)$; comme $\varphi : (x,y) \mapsto (1+ax, 1+by)$ est bijective et linéaire (donc $\mathcal{C}^2$ de même que φ^{-1}), f et g sont simultanément $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2dparfy[y] == (1-a)(1-2a)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2-3(a+b)+4ab)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (1-b)(1-2b)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$; on peut choisir $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{2}$, il reste $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ donc $g(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$ et $f(x,y) = \alpha(x+y) + \beta\left(x + \dfrac{1}{2}y\right)$ avec α et β $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** Facile

2. $t\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, yz) = t^a \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ en dérivant par rapport à x

3. $f(x,y,z) = f(tx,ty,tz) \xrightarrow[t\to 0^+]{} f(0,0,0)$ car f est continue en $(0,0,0)$; E_0 est l'ensemble des fonctions constantes

4. $g'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) - at^{a-1}f(x,y,z)$, on en déduit l'équation différentielle ; $g(t) = \alpha t^a$ avec $g(1) = 0$ donc $g = 0$ et $f \in E_a$.
si $f \in E_a$ alors $g(t) = 0$ donc $g'(1) = 0$ qui donne la relation

Exercice 34 *[sujet]* **1.** $(0,0)$ est le seul point critique

2. $f(x,x^2) - f(0,0) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ qui ne garde pas un signe fixe donc pas d'extremum en $(0,0)$, ni ailleurs car f est $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert

Exercice 35 *[sujet]* $(0,0)$ est le seul point critique puis $f(x,x^3) - f(0,0) = x^5 + \ln\left(1 + \dfrac{x^6}{4}\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ (qui change de signe) donc pas d'extremum en $(0,0)$.

Exercice 36 *[sujet]* $g(x,\lambda x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda^2 x^2 \geqslant 0$ si $\lambda \neq 0$ et $g(x,0) = 3x^4 \geqslant 0$. Par contre $g(x, 2x^2) = -4x^4$ donc pas de minimum local en $(0,0)$

Exercice 37 *[sujet]* Un seul point critique $(3,-1)$ $f(3+h,-1+k) - f(3,-1) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \dfrac{k}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}k^2 \geqslant 0$ donc min local en $(3,-1)$.

Exercice 38 *[sujet]* les points critiques sont $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$ (et d'autres qui se trouvent par permutations de x, y et z) ; $f(x,y,z) \underset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\sim} x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0$ donc minimum local en $(0,0,0)$; $f(1+h, 1+k, 1+l) - f(1,1,1) = k^2 + h^2 + l^2 - 2hk - 2hl - 2kl - 2hkl$ donc $f(1+h,1,1) - f(1,1,1) = h^2 \geqslant 0$ et $f(1+t,1+t,1+t) - f(1,1,1) \underset{t\to 0}{\sim} -3t^2 \leqslant 0$ donc par d'extremum en $(1,1,1)$. Idem en $(1,-1,-1)$ car $f(x,y,z) = f(x,-y,-z)$

Exercice 39 *[sujet]* 5 points critiques $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ et $(0, \pm 1/\sqrt{3})$. $f(0,0) = 0$ et $f(0,1) = 0$ donc minimum (absolu) en $(0,0)$ et $(0,1)$ car $f \geqslant 0$; $f(x, 1/\sqrt{3}) - f(0, 1/\sqrt{3}) = x^2 \geqslant 0$ et $f(0,t) - f(0,1/\sqrt{3})$ admet un maximum local en $1/\sqrt{3}$ donc pas d'extremum local en $(0, 1/\sqrt{3})$. De même pour les 2 autres puisque $f(x,y) = f(x,-y)$

Exercice 40 *[sujet]* Un seul point critique $(2,1)$ et $(\mathbb{R}^{+*})^2$ est ouvert. $f(2+h,1+k) - f(2,1) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\sim} hk + \dfrac{1}{2}h^2 + 2k^2 = 2\left(k + \dfrac{h}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{8}h^2 \geqslant 0$ donc minimum local en $(2,1)$.

Exercice 41 *[sujet]* Pas de point critique sur $\overset{o}{D}$ (ouvert) donc les extrema de f, continue, sur D, fermé borné, sont atteint sur la frontière de D ; $f(x,0) = x^2$ est maximal en 1 et minimal en 0 ; $f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$ est maximal en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, minimal en $\dfrac{\pi}{4}$. Au final $\min\limits_D(f) = f(0,0) = 0$ et $\max\limits_D(f) = f(1,0) = 1$

Exercice 42 *[sujet]* f est continue sur $K = [-1,1]^2$, fermé borné donc f admet des extrema absolus sur K. $f \geqslant 0$ et $f(0,0) = 0$ donc $\min\limits_K f = 0$. Les points critiques sur $\overset{o}{K} =]-1,1[^2$ sont les points de la forme $(x,0)$; aucun ne peut être le maximum donc il est atteint sur la frontière de K. $f(x,1) = x^4 + \ln(2)$ est maximal en 1 (et -1) ; $f(1,y) = y^3 + \ln(1+y^2)$ est maximal en 1 donc $\max\limits_K f = f(1,1) = 1 + \ln(2)$. Pas d'extremum local supplémentaire.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{x}(g(x,0) - g(0,0)) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

Puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)\right| = \left|2y \ln\|(x,y)\|_2 + \dfrac{2x^2 y}{\|(x,y)\|_2^2}\right| \leqslant 2\|(x,y)\|_2 \left|\ln\|(x,y)\|_2\right| + \dfrac{2\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ de même pour $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ donc g est $\mathcal{C}^1$

2. g est continue sur D qui est fermé borné non vide
3. $g(0,0)=0$ et $g(x,x)=2x^2\ln(x)<0$ si $x>0$ donc pas de minimum en $(0,0)$. Comme $g(x,-x)=-x^2\ln(x)>0$, pas de maximum non plus.

   $g=0$ sur tout le bord de D ; sur $D_1=D\cap\left(\mathbb{R}^2\right)^2$, $g\leqslant 0$ donc tous les points du bord de D_1 sauf $(0,1)$ et $(1,0)$ sont des maximum ; pas de maximum en $(0,1)$ car $g>0$ sur l'autre quart de disque à côté de $(0,1)$. Au final, tous les points du bord de D sont des extremum sauf $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$.

Exercice 44 *[sujet]* $f\geqslant 0=f(0,0)$ donc $\min\limits_T f=0$; f est continue sur T, fermé borné, donc $\max\limits_T f$ existe ; comme $f=0$ sur la frontière de T, $\max\limits_T f$ est atteint en un point de $\overset{o}{T}$ donc en un point critique. Le seul point critique est $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ donc $\max\limits_T f=f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

Exercice 45 *[sujet]* **1.** si $x\geqslant y$, $|f(x,y)|\leqslant\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)2y}=\dfrac{x}{2(1+x)(1+y)}\leqslant\dfrac{x}{2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ et on fait de même dans l'autre cas

2. si $x\geqslant y$, $f(x,y)\leqslant\dfrac{x}{1+x}\times\dfrac{1}{2(1+y)}\leqslant\dfrac{1}{2}$ et de même si $y\geqslant x$
3. f est continue sur K, fermé borné non vide en dimension finie, donc $M=\max\limits_K(f)$ existe. Comme $(1,1)\in K$, on a $M\geqslant f(1,1)=\dfrac{1}{8}$ et si $(x,y)\notin K$ alors $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x}\dfrac{y}{1+y}\dfrac{1}{x+y}\leqslant 1\times 1\times\dfrac{1}{20}<f(1,1)\leqslant M$ donc $M=\max\limits_D(f)$ aussi (et existe)
4. Si $x=0$ ou $y=0$ alors $f(x,y)=0$ donc M est atteint sur $\overset{o}{D}=(\mathbb{R}^{+*})^2$ qui est un ouvert et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{D}$ donc M est atteint en un point critique. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}$ (et sym pour y) donc (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} y=x^2\\ x=y^2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$ donc $M=f(1,1)=\dfrac{1}{8}$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** f est continue et $E=[-2,2]^2$ est fermé borné donc f admet des extrema absolus sur A. Les extrema locaux sont atteints soit en un point critique de $\overset{o}{A}$, soit sur la frontière de A. Les points critiques dans $\overset{o}{A}$ sont $(0,0)$, $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

2. $f(x,x)=2x^4\geqslant 0$ et $f(x,-x)\underset{x\to 0}{\sim}-2x^2\leqslant 0$ donc pas d'extremum local en $(0,0)$
3. $f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k)-f(\sqrt{2},-\sqrt{2})\underset{(h,k)\to(0,0)}{\sim}10\left(h+\dfrac{k}{10}\right)^2+\dfrac{99}{100}k^2\geqslant 0$ donc minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$; de même en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puisque $f(-x,-y)=f(x,y)$. Reste la frontière de A : si $y\in[-2,2]$, $f(2,y)=y^4-2(y-2)^2+16=g(y)$. En étudiant les variations de g (signe de g''), on trouve que g est minimale en un point $y_0\in\left[-2,\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right]$ et maximale en $y=2$ avec $g(2)=32$ (idem sur les 3 autres côtés). On a donc $\max\limits_A f=f(2,2)=f(-2,-2)=32$. Pour le minimum sur A, il faut comparer la valeur de $f(2,y_0)$ et celle de $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-8$: on a $y_0\in\left[-\dfrac{5}{3},-\dfrac{3}{2}\right]$ (vérifier $g'\left(-\dfrac{5}{3}\right)<0$ et $g'\left(-\dfrac{3}{2}\right)>0$) donc $(y_0-2)^2\leqslant\left(2+\dfrac{5}{3}\right)^2=\left(\dfrac{11}{3}\right)^2$ puis $g(y_0)=y_0^4-2(y_0-2)^2+16\geqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^4-2\left(\dfrac{11}{3}\right)^2+16>-8=f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (ouf!). En étudiant les 3 autres côtés du carré A, on trouve de même et on peut, enfin, conclure $\min\limits_A f=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=8$. Pas d'autre extremum local sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert) puisqu'il n'y a pas de point critique hors de A.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** $z_M=R(1+e^{ia})$ et $z_{M'}=R(-1+e^{ib})$ puis $S=\dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})|=\dfrac{R^2}{2}\begin{vmatrix}1+\cos(a) & -1+\cos(b)\\ \sin(a) & \sin(b)\end{vmatrix}$

2. f est continue sur $[0,\pi]^2$ qui est fermé borné
3. facile
4. $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$; sur la frontière de $[0,\pi]^2$, le triangle est aplati donc $S=0$, le triangle d'aire maximal est obtenu en un point de $]0,\pi[^2$ donc en un point critique qui est unique.

Exercice 48 *[sujet]* **1.** f est continue et D fermé borné ; $f\geqslant 0=f(0,0)$ donc $\min f=0$

2. développer
3. il n'y a que $(0,0)$

4. comme le seul point critique dans D' est le minimum, le maximum est sur la frontière.

5. étudier $t \mapsto \mathrm{sh}(t) - t$ et $t \mapsto t - \sin(t)$

6. signe de g' avec ce qui précède puis $\max f = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f(0,1)$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** $\nabla f(1,1) = (4,-2)$ donc plan tgt $4(x-1) - 2(y-1) - z = 0$; $\nabla f(1,2) = (-4,0)$ donc plan tgt $4(x-1) + (z+1) = 0$

2. $f(x, 2x^2) = -x^4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ donc pas de minimum absolu et comme $f(x,0) = 3x^4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, pas de maximum absolu non plus.

3. si $a \neq 0$, $f(x, ax) \underset{x\to 0}{\sim} (ax)^2 \geqslant 0$, $f(x,0) = 3x^4 \geqslant 0$ et $f(0,y) = y^2 \geqslant 0$ pourtant pas de minimum local en 0 car $f(x, 2x^2) = -x^4 < 0$ si $x \neq 0$.
$\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les extrema locaux sont des points critiques, donc en $(0,0)$ seulement, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** a est un point critique (cours) ; c/ex $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur $B_f(0,1)$

2. $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 2x(ax+by) = 0 \\ b - 2y(ax+by) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{b}{a}x \\ x = \dfrac{\pm a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \end{array}\right.$

3. Par croissance comparée, on a $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x,y) = 0$. On suppose $a > 0$ et $b > 0$ (par ex), on note $X_+ = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}, \dfrac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\right)$ et $X_- = -X_+$ les pts critiques de f puis $m = f(X_-)$ et $M = f(X^+)$. Comme $m < 0$ et $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour $\|(x,y)\|_2 > r$, on ait $\dfrac{m}{2} < f(x,y) < \dfrac{M}{2}$. Puis f est continue sur $B_f(0,r)$ (fermée bornée non vide) donc admet sur $B_f(0,r)$ un min et un max. On a par ex, $\displaystyle\max_{B_f(0,r)} f \geqslant M$ car $X_+ \in B_f(0,r)$, donc $\displaystyle\max_{B_f(0,r)} f$ est en fait le maximum de f sur $\mathbb{R}^2$ entier. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, ce max est atteint en un point critique donc en X_+ (idem avec X_- pour le min). Il ne peut pas y avoir d'autre extremum local car $\mathbb{R}^2$ est ouvert et il n'y a pas d'autre pt critique.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** cours endomorphismes symétriques

2. calculer $f(x+h)$ et vérifier $\nabla f(x) = f(x) - u$ (en utilisant f symétrique)

3. Le point critique est $x_0 = f^{-1}(u)$, puis on vérifie $g(x) - g(x_0) = \dfrac{1}{2}(f(x-x_0)|x-x_0) > 0$ si $x \neq x_0$.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** On pose $f(x,y,z) = xy - z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -1$ ne s'annule pas donc tous les points sont réguliers.

2. Le plan tgt en M_0 contient D si et seulement si il contient le point $(2,-3,0)$ (un point de D) et si $\nabla f(M_0) \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (un vecteur directeur de D) on en déduit $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et $(2-x_0)y_0 - (3+y_0)x_0 = -z_0$ avec $x_0y_0 = z_0$; on trouve $x_0 = \dfrac{1}{2} = z_0$ et $y_0 = 1$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** On pose $f(x,y,z) = xyz - 1$; l'équation du plan tangent $(\mathcal{P}_0)$ en M_0 est $(x-x_0)y_0z_0 + (y-y_0)x_0z_0 + (z-z_0)x_0y_0 = 0$.

2. On a $\overrightarrow{OP_0} \perp (\mathcal{P}_0)$ donc $\overrightarrow{OP_0} = \lambda\nabla(f)(M_0)$, soit $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda y_0z_0 \\ y = \lambda x_0z_0 \\ z = \lambda x_0y_0 \end{array}\right.$ et $M_0 \in \mathcal{P}_0$ donc, en remplaçant dans l'équation de $(\mathcal{P}_0)$, on trouve $\lambda = \dfrac{1}{(x_0y_0)^2 + (x_0z_0)^2 + (y_0z_0)^2}$

Exercice 54 *[sujet]* On a $D \mathbin{/\!/} \mathcal{P}_0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \nabla(f)(M_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$ donc si et seulement si $x_0 + y_0 = 0$; comme $M_0 \in S$, on a aussi $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$, ce qui donne $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

Exercice 55 *[sujet]* **1.** $\nabla(f)(M) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 3x^2 + y \\ x - 2y \\ -1 \end{pmatrix}$ ne s'annule jamais

2. $(\mathcal{P}_0)$ est parallèle à xOy si et seulement si $\nabla(f)(M) \mathbin{/\!/} \overrightarrow{k}$ donc si et seulement si $\nabla(f)(M) \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$, ie si et seulement si $\left\{\begin{array}{c} x - 2y = 0 \\ 4x^3 - 3x^2 + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5/8 \text{ et } y = 5/16 \\ \text{ou} \\ x = 7/8 \text{ et } y = 7/16 \end{array}\right.$, on calcule alors la valeur de z en utilisant l'équation de (S).