TD23 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 **(CCINP PSI 2023)**

Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$ et $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } (x,y) \notin F \\ 0 & \text{si } (x,y) \in F \end{cases}$

1. Justifier que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus F)$

2. Montrer que, si $(x,y) \notin F$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3f(x,y)$

3. Existence et valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

4. f est-elle continue en $(0,0)$? *(*)*

Exercice 2 **(ENSEA PSI 2021)**

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3 - x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$? *(*)*

Exercice 3 **(CCP PC 2011)**

Soit E_a l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\forall t > 0, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(tx,ty,tz) = t^a f(x,y,z)$.

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.

2. Montrer que si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.

3. Montrer que si $f \in E_0$ alors $f(x,y,z) = f(0,0,0)$. Que peut-on en déduire sur E_0 ?

4. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = af(x,y,z)$.
Montrer que $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f(tx,ty,tz) - t^a f(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie $tg'(t) = ag(t)$. En déduire que $f \in E_a$.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**

Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 g(x,y) + \partial_2 g(x,y) = 0$. On pose $h(u,v) = g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

1. Calculer $\partial_1 h(u,v)$

2. Trouver (α,β) tels que $h(u,v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

3. Déterminer g

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2013)**

Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}^-\}$ (on pourra passer en coordonnées polaires).

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; on pourra utiliser le changement de variable $u = x + ay$ et $v = x + by$ *(*)*

Exercice 7 **(CCINP PSI 2018)**

$f : (x,y) \mapsto xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$ admet-elle des extrema locaux sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$?

Exercice 8 **(Centrale PSI 2023)**

Soient $D = (\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

1. Montrer que f est continue sur D. *(*)*

2. Montrer que f est majorée sur D. *(*)*

3. Soit $K = [0,10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D. *(*)*

4. Déterminer $\max\limits_D(f)$.

Exercice 9 **(CCP PSI 2013)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ autoadjoint défini positif.

1. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit g par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que g admet des dérivées partielles et les expliciter. *(*)*
2. Montrer que g admet un unique point critique et que ce point critique est un minimum global. *(*)*

Exercice 10
Soit S la surface d'équation $xy = z$ et D la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{array} \right.$.

1. La surface S est-elle régulière ?
2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient D. *(*)*

Indications

Exercice 1

4. *Étudier $f(x, -x + x^\alpha)$ avec $\alpha > 0$ bien choisi.*

Exercice 2

3. *Changer de notation si besoin : poser $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.*

Exercice 6

Comme pour l'exercice **2** *si nécessaire*

Exercice 8

1. *Distinguer $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$.*
2. *Idem.*
3. *Il s'agit de vérifier que $\max\limits_D f = \max\limits_K f = M$ en vérifiant que f prend des valeurs $\leqslant M$ en dehors de D.*

Exercice 9

1. *Revenir à la définition, en introduisant e_i un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Les calculs sont plus faciles en posant $x = x_0 + h$ avec x_0 le point critique.*

Exercice 10

2. *Pour qu'une droite soit incluse dans un plan, il suffit que deux de ses points soient dans le plan.*