

**PSI2. Exercices moteurs électriques. Propositions de solution.****Intérêt des exercices :**

**A** reprend la méthode de calcul développée en cours. Ce moteur est dit brushless : le champ magnétique statorique est créé par des aimants permanents et non par des courants continus, donc pas de contact électrique entre la partie mobile et la partie statique.

**B** donne le principe d'une serrure électrique. L'AN vous convaincra que vous ne la forcerez pas.

**C** aborde la sustentation magnétique et met en évidence la nature instable de la position d'équilibre.

**D** reprend le moteur synchrone. Extrait centrale.

**E** idem mais ccp. Comparer.

**F** aborde le transfert d'énergie électromécanique dans une des phases de l'alimentation du moteur synchrone.

**G** met en évidence l'intérêt du bouclage pour contrôler la vitesse de rotation d'une MCC. Une petite liaison avec le cours de SI.

**A. Moteur synchrone à aimants permanents**

1) Comme les lignes de champ restent pratiquement parallèles entre elles, la conservation du flux entraîne que le champ magnétique est  $\vec{B} = B\vec{u}_e$  avec B constante sur une ligne de champ. On peut alors exprimer  $\vec{H}$  dans les trois zones :

Dans le matériau ferromagnétique linéaire on a :  $\vec{H}_m = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r} = \frac{B}{\mu_0\mu_r}\vec{u}_e$ , dans l'entrefer donc dans l'air, on a  $\vec{H}_e = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}\vec{u}_e$  et dans l'aimant :  $\vec{H}_a = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \left(\frac{B}{\mu_0} - M_0\right)\vec{u}_e$ .

2) On applique le théorème d'Ampère pour  $\vec{H}$  sur le contour C qui est une ligne de champ magnétique. En l'absence de courants libres on a

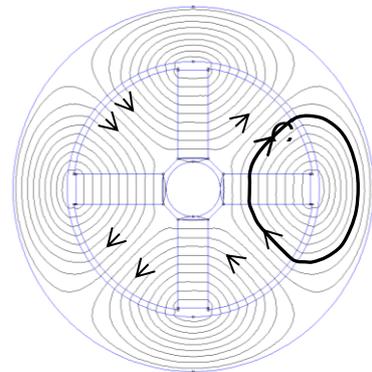
$$\oint \vec{H} \cdot d\ell \vec{u}_e = 0$$

En tout point du contour le champ  $\vec{H}$  est colinéaire à  $\vec{B}$  donc à  $\vec{u}_e$  ce qui simplifie le produit scalaire.

La circulation dans le matériau magnétique, de perméabilité très grande étant négligée, il reste :

$$b \left( \frac{B}{\mu_0} - M_0 \right) + 2e \frac{B}{\mu_0} = 0$$

$$M_0 = \left( 1 + \frac{2e}{b} \right) \frac{B}{\mu_0} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$



3) La fonction  $B_r(\alpha)$  est périodique, de période  $\pi$  et impaire. Le terme fondamental de son développement en série de Fourier est donc de la forme :  $B_r(\alpha) = B_1 \sin(2\alpha)$

4) On obtient sans problème  $\gamma = \theta + \alpha$  et on reporte :  $\vec{B}_R = B_1 \sin(2(\gamma - \theta))\vec{u}_r$

5) L'énergie magnétique contenue dans l'entrefer vaut :

$$E_{mag} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_R + \vec{B}_S)^2}{2\mu_0} d\tau$$

En coordonnées cylindres, l'élément de volume est  $d\tau = r dr d\gamma dz$ . z varie de 0 à h, r de a à (a+e), et  $\gamma$  de 0 à  $2\pi$ . Comme la fonction à intégrer ne dépend ni de z ni de r, l'intégrale devient une intégrale simple :

$$E_{mag} \approx \frac{aeh}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (\vec{B}_R + \vec{B}_S)^2 d\gamma \quad \text{car } e \ll a$$

En développant le carré, on s'aperçoit que seul le terme croisé peut donner un résultat qui dépend de  $\theta$ . On ne va donc calculer que sa seule contribution.

$$E_{mag}^{utile} \approx \frac{aehB_0B_1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \sin(2(\gamma - \theta)) \cos(\omega t - p\gamma) d\gamma$$

On transforme le produit en somme :

$$E_{mag}^{utile} \approx \frac{aehB_0B_1}{2\mu_0} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin(2(\gamma - \theta) + \omega t - p\gamma) d\gamma + \int_0^{2\pi} \sin(2(\gamma - \theta) - \omega t + p\gamma) d\gamma \right\}$$

La seconde intégrale est forcément nulle car  $p$  est entier et la primitive sera en  $\cos$  car  $p+2$  ne peut s'annuler. Pour la même raison, la première est nulle SAUF si  $p=2$  (Cas particulier à traiter pour l'intégration car  $2-p$  apparaît au dénominateur dans l'intégration). Dans ce cas, on sort :

$$E_{mag}^{utile} \approx \frac{aeh\pi B_0B_1}{\mu_0} \sin(\omega t - 2\theta)$$

6) Le couple électromagnétique subi par le rotor s'écrit  $\Gamma_e = \frac{\partial E_{mag}}{\partial \theta} = \frac{\partial E_{mag}^{utile}}{\partial \theta}$  soit ici

$$\Gamma_e = -\frac{2\pi h e a B_0 B_1}{\mu_0} \cos(\omega t - 2\theta).$$

7) On a  $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$  donc  $\Gamma_e = -\frac{2\pi h e a B_0 B_1}{\mu_0} \cos((\omega - 2\Omega)t - 2\theta_0)$  qui est une fonction

sinusoïdale du temps, de valeur moyenne nulle, sauf si  $\Omega = \frac{\omega}{2}$ .

On a alors  $\Omega = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  et  $\Gamma_e = -\frac{2\pi h e a B_0 B_1}{\mu_0} \cos(2\theta_0)$ .

8) Le couple est maximal pour  $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  et on a  $\Gamma_M = \frac{2\pi h e a B_0 B_1}{\mu_0} = 10,4 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

9) Le moteur tournant à vitesse constante, le théorème du moment cinétique scalaire impose  $\Gamma_r + \Gamma_e = 0$  soit  $-\frac{\Gamma_M}{2} - \Gamma_M \cos(2\theta_0) = 0$  d'où  $\cos(2\theta_0) = -\frac{1}{2}$ . Les valeurs possibles pour  $\theta_0$  sont  $\pm \frac{\pi}{3}$  (ou  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$  ...).

Pour étudier la stabilité, on suppose que le moment du couple résistant augmente légèrement (en valeur absolue) à partir de sa valeur à l'équilibre. Dans ce cas le rotor est freiné ce qui correspond à une diminution de  $\theta_0$  à partir de  $\pm \frac{\pi}{3}$ . Si la valeur initiale était  $\frac{\pi}{3}$  alors le couple

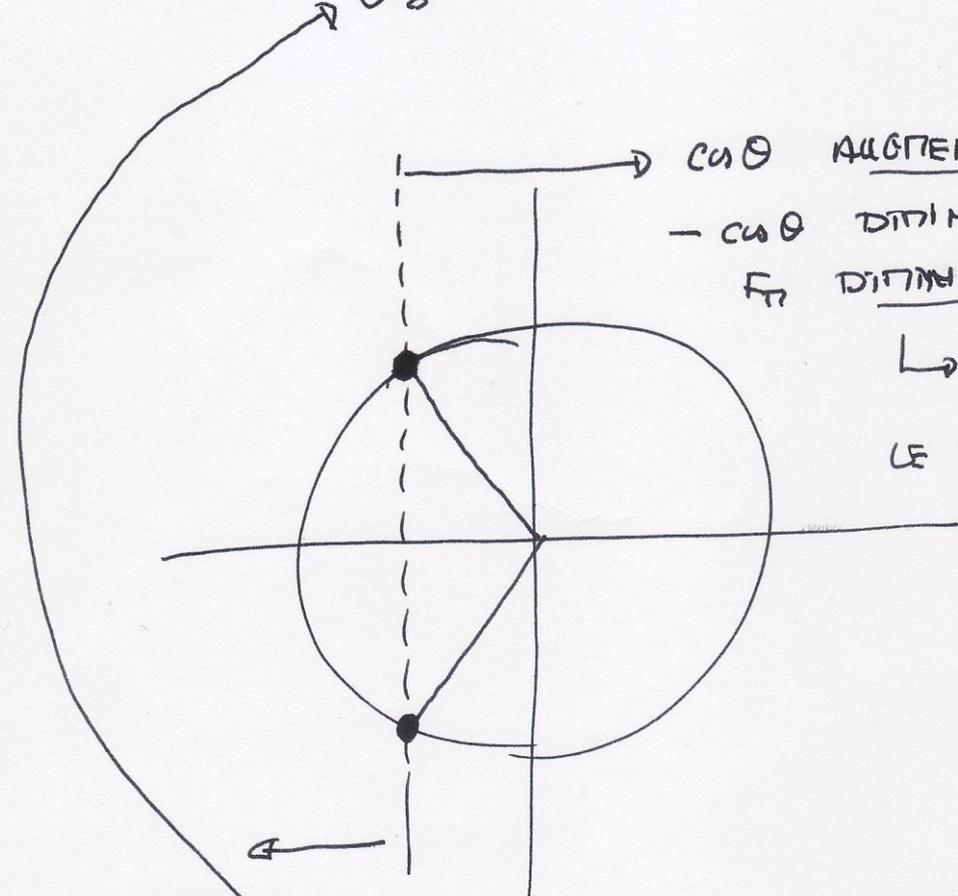
moteur  $-\Gamma_M \cos(2\theta_0)$  diminue et le régime est instable. Par contre, si la valeur initiale était  $-\frac{\pi}{3}$ , alors le couple moteur  $-\Gamma_M \cos(2\theta_0)$  augmente et le régime correspondant est stable. Le

fonctionnement est stable pour  $\theta_0 = -\frac{\pi}{3}$ .

Page suivante, une approche graphique du calcul:

# AUGMENTATION DU FROTTEMENT

$\theta_0$  DIMINUE



$\cos \theta$  AUGMENTE  
 $-\cos \theta$  DIMINUE  
 $F_r$  DIMINUE

$\rightarrow \frac{d\omega}{dt} < 0$   
 LE ROTEUR S'ARRÊTE

$\cos \theta$  DIMINUE  
 $-\cos \theta$  AUGMENTE

$F_r$  qui s'oppose à l'augmentation du frottement

$\frac{d\omega}{dt} > 0$

STABLE

**B.Serrure électromagnétique de porte.**

Analyse préliminaire : le matériau magnétique canalise les lignes de champ et constitue donc un tube de champ. On vérifie que la section droite du tube de champ est la même partout (sauf évidemment dans les virages) :  $S_{\text{tube}}=ab=3\text{cm}^2$ . La conservation du flux et de la section droite entraîne la conservation de la norme du champ magnétique dans tout le matériau.

On oriente l'axe  $Ox$  vers le haut et  $x$  désigne la largeur de l'entrefer

On crée donc un contour dans le matériau, orienté dans le sens trigo, de vecteur unitaire associé  $\vec{n}$ .

On oriente de même les spires pour que leur vecteur normal soit  $\vec{n}$

La longueur du contour est  $\ell$  dans le matériau magnétique et  $2x$  dans l'air.

On écrit maintenant :

$$\vec{B} = B\vec{n} ; \quad \vec{H}_{\text{air}} = \frac{B}{\mu_0}\vec{n} ; \quad \vec{H}_{\text{mat}} = \frac{B}{\mu_0\mu_r}\vec{n}$$

Le théorème d'Ampère s'écrit alors sur le contour fermé s'écrit alors :

$$\frac{B}{\mu_0}(2x) + \frac{B}{\mu_0\mu_r}\ell = NI$$

Ce qui permet de calculer :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} \approx \frac{\mu_0 NI}{2x}$$

car  $x_{\text{min}}=100\mu\text{m}$  et  $\frac{\ell}{\mu_r} \approx 2\mu\text{m}$

Le calcul du flux à travers les  $N$  spires donne alors :  $\varphi = N \left( \frac{\mu_0 NI}{2x} \right) S_{\text{tube}} = L(x)I$

L'énergie magnétique est  $E_m = \frac{1}{2}L(x)I^2$

et la composante sur l'axe  $Ox$  de la force subie par la partie supérieure est  $F_x = \frac{\partial E_m}{\partial x} = -\frac{\mu_0 N^2 S_{\text{tube}} I^2}{4x^2}$

dont la norme maximale est atteinte lorsque les deux pièces sont au contact pour  $x=2e=100\mu\text{m}$ .

On calcule maintenant  $|F_x|_{\text{max}} \approx 60\text{kN}$

Pour obtenir la puissance consommée, on peut calculer la résistance des  $N$  spires.

La longueur d'une spire est  $2(d+a)$ . On utilise le résultat connu de la résistance électrique d'un fil :

$$R = \frac{2N(d+a)}{\gamma S} \approx 30\text{m}\Omega$$

et une puissance consommée par effet Joule, pour un courant de  $1\text{A}$ ,  $P \approx 1\text{W}$ .

**C.Fin transrapid.**

Q1. L'énergie magnétique est tout simplement  $E_m(z) = \frac{1}{2} L(z) i^2$

Q2. On calcule maintenant :  $\vec{F}_{em} = \left( \frac{\partial E_m}{\partial z} \right) \vec{u}_z = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z^2} \vec{u}_z = -F(z) \vec{u}_z$  Force verticale vers le haut :  $F(z) > 0$ .

Q3. On écrit que la force équilibre le poids et on sort la masse équilibrée pour  $z = \delta$  :

$$m = \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4g\delta^2} \approx 16 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Q4. Il faut 11 électroaimants, en fait 12 parce qu'ils vont par paires.

Q5.

Méthode 1 : on se met à l'équilibre, on imagine un petit déplacement vers le haut donc  $z$  diminue donc  $1/z$  augmente donc  $F(z)$  augmente donc pousse vers haut. La force n'est pas une force de rappel. Pour la stabilité, elle aurait du baisser.

Méthode 2 : on passe par l'énergie potentielle. Le poids et la force magnétique dérivent de l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z} - mgz$$

L'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle, qui est unique, mais c'est forcément un maximum si vous regardez les limites aux bornes 0 et  $+\infty$ . Equilibre instable.

**D.Utilisation d'un moteur synchrone à aimants permanents. Évaluation du couple****III.A Champ magnétique rotorique**

**III.A.1)** Dans le milieu magnétique constituant le rotor, le champ magnétique  $\vec{B}_r$ , le champ excitation magnétique  $\vec{H}_r$ , et l'aimantation  $\vec{M}_r$  sont liés par la relation  $\vec{B}_r = \mu_0(\vec{H}_r + \vec{M}_r)$ .

**III.A.2)** On constate que  $e=3\text{mm} \ll a=150\text{mm}$ . Donc  $x_e = \frac{e}{a} \ll 1$  négligeable devant 1, de même que

$\frac{a}{r} \approx 1$  à l'ordre 0. Les expressions proposées du champ magnétique rotorique se simplifient donc à

$$\text{l'ordre 0 en } \frac{e}{a} \text{ en: } \begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2}(1)^2(1+1^2)J \cos(\theta - \alpha) = J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = \frac{-1}{2}(1)^2(1-1^2)J \sin(\theta - \alpha) = 0 \end{cases}$$

**III.A.3)** Avec  $\Omega$  vitesse angulaire constante,  $\alpha(t) = \alpha_{r_s} + \Omega t = \Omega t$ .

Le champ rotorique s'écrit alors:  $B_r(r, \theta) = J \cos(\theta - \Omega t)$  ;  $B_\theta(r, \theta) = 0$

On en déduit la composante radiale du champ dans la direction  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

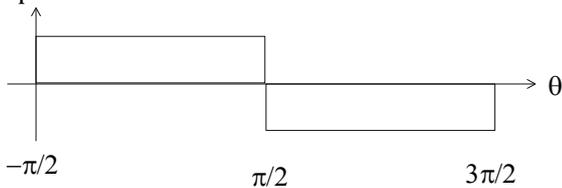
$$B_r(r, \theta) = J \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right) = J \sin(\Omega t). \text{ Le champ rotorique ressenti en } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ est donc au cours du temps}$$

sinusoïdal, de période identique à celle de la rotation du rotor.

**III.B Champ magnétique statorique**

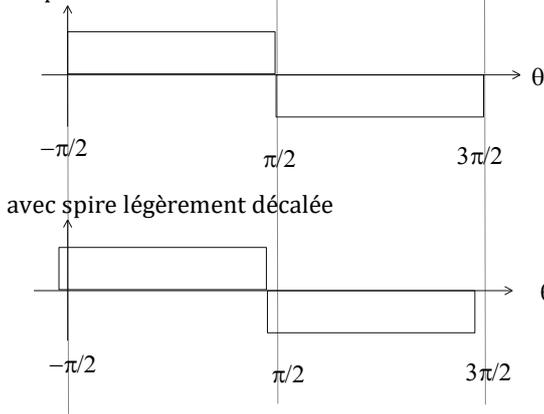
**III.B.1)** On obtient le dessin suivant :

composante radiale



**III.B.2)** Avec une seconde spire un peu à côté, on obtient la même configuration légèrement décalée et on voit apparaître la somme en créneaux :

composante radiale



A chaque saut, il y a une spire. Donc au total 8 spires.

**III.B.3)** La représentation précédente permet d'approximer  $B_{s1}(\theta, t) \approx K_s i_1(t) \cos \theta$ .

Le coefficient  $K_s$  dépend du nombre de spires, et d'après la question III.B.1, de la taille de l'entrefer (et de la perméabilité magnétique dans l'entrefer).

**III.B.4)** Le second enroulement est décalé de  $+\pi/2$ . Donc le champ créé par cet enroulement est

$$B_{s2}(\theta, t) \approx K_s i_2(t) \cos(\theta - \pi/2) = +K_s i_2(t) \sin \theta.$$

En remplaçant  $i_2(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2)$  qui est en quadrature retard par rapport à  $i_1(t)$ , on obtient

$$\text{bien } B_{s2}(\theta, t) = K_s I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2) \sin \theta = +K_s I \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta.$$

**III.B.5.** Le champ résultant est donc :

$B_{S1}(\theta, t) + B_{S2}(\theta, t) = K_S I \cos(\omega_S t + \beta_S) \cos \theta + K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S) \sin \theta = K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S)$ , dont l'expression en fonction de  $\omega_S t - \theta$  est caractéristique d'une onde progressant vers les valeurs croissantes de  $\theta$  à la vitesse (angulaire)  $\omega_S$ .

Il s'agit donc d'un champ tournant à la vitesse (angulaire)  $\omega_S$  vers les valeurs croissantes de  $\theta$ , d'amplitude  $K_S I$ .

### III.C Energie magnétique dans l'entrefer

**III.C.1.** La densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative  $\mu_r$  est:

$$\frac{B^2}{2\mu_r \mu_0}.$$

**III.C.2.** On intègre sur le volume de l'entrefer de perméabilité  $\mu_0$  (où l'essentiel de l'énergie est stockée):

$$\xi = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^{a+e} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(B_r(r, \theta) + B_s(r, \theta, t))^2}{2\mu_0} dr \cdot r d\theta \cdot dz \text{ avec } r \approx a, \text{ donc}$$

$$\xi = \frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (J \cos(\theta - \Omega t) + K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta \text{ que l'on sépare en trois contributions:}$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (J \cos(\theta - \Omega t))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} J^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} J^2$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S))^2 d\theta = \frac{\ell e a}{2\mu_0} (K_S I)^2 \pi = \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2$$

$$\frac{\ell e a}{2\mu_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} (2J \cos(\theta - \Omega t) \cdot K_S I \cos(\omega_S t - \theta + \beta_S)) d\theta$$

$$= \frac{\ell e a}{2\mu_0} J K_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(\theta - \Omega t + \omega_S t - \theta + \beta_S) + \cos(\theta - \Omega t - \omega_S t + \theta - \beta_S)] d\theta$$

$$= \frac{\ell e a}{2\mu_0} J K_S I \int_{\theta=0}^{2\pi} [\cos(-\Omega t + \omega_S t + \beta_S) + \cos(2\theta - \Omega t - \omega_S t + \theta - \beta_S)] d\theta = \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \cos(-\Omega t + \omega_S t + \beta_S)$$

$$\xi = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_S I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \cos(-\Omega t + \omega_S t + \beta_S)$$

### III.D Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

**III.D.1)** Le couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor est

$$\Gamma = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S - \alpha)$$

$$= \frac{V}{2\mu_0} J K_S I \sin(\omega_S t + \beta_S - \Omega t)$$

**III.D.2)** Pour que le couple moyen soit non nul, il faut que le rotor et le champ statorique tournent à la même vitesse: condition de synchronisme  $\Omega = \omega_S$ . De plus pour que le couple soit moteur (positif), il faut que  $\sin(\beta) = \sin(\beta_S) > 0$ , soit  $\beta = \beta_S \in ]0, \pi[$  : le rotor doit être en retard sur le champ statorique.

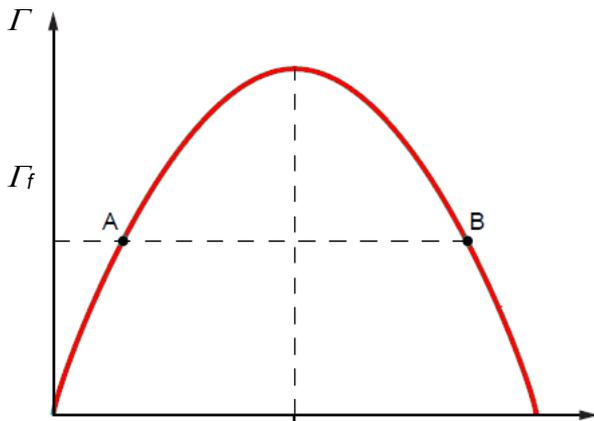
**III.D.3.** L'angle de calage des courants  $\beta_S$  est aussi l'angle entre la direction principale du champ rotorique et la position du rotor, compte tenu de la convention choisie ( $t=0$  lorsque  $\alpha=0$ ).

Le couple maximal correspond à  $\beta_S = \pi/2$ .

On retrouve la discussion sur les points de fonctionnement A et B compatibles avec un couple donné inférieur au couple maximal.

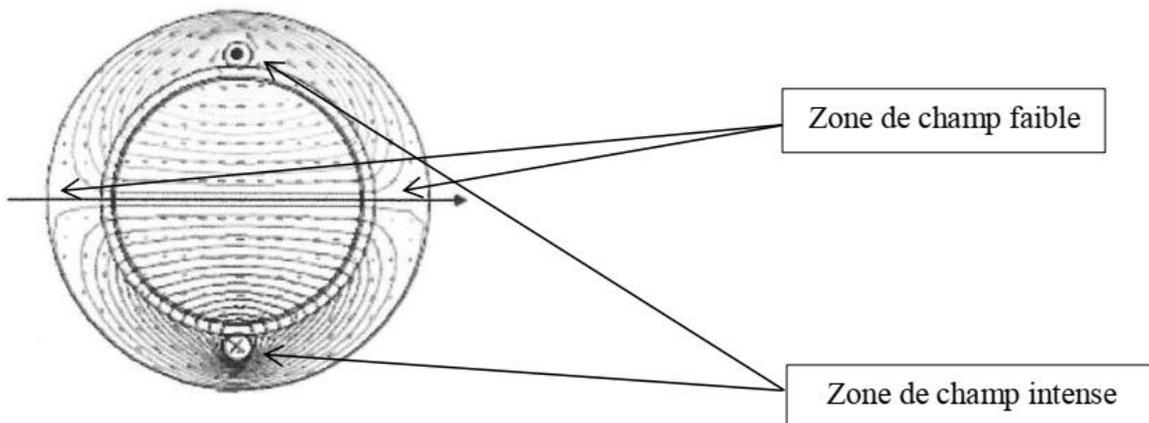
En raisonnant en régime quasi permanent, si on imagine une perturbation qui augmente  $\beta_S$  à partir du point de fonctionnement A, le couple moteur augmente, le rotor accélère (th du moment

cinétique), et donc l'angle  $\beta_s$  diminue. De même si la perturbation diminue  $\beta_s$ , le couple diminue, le rotor décélère, et  $\beta_s$  augmente: le point de fonctionnement A est stable. Au contraire si on tient un raisonnement similaire à partir du point B, on trouve que c'est un point de fonctionnement instable.



**E. Le moteur synchrone version ccp.**

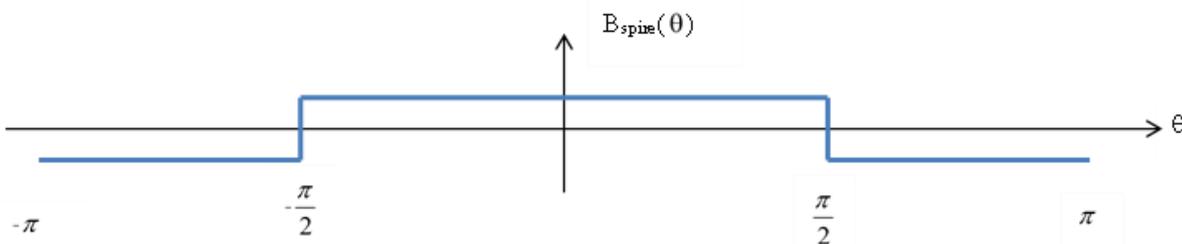
Q32) B n'est pas uniforme, les lignes de champ ne sont pas équidistantes.



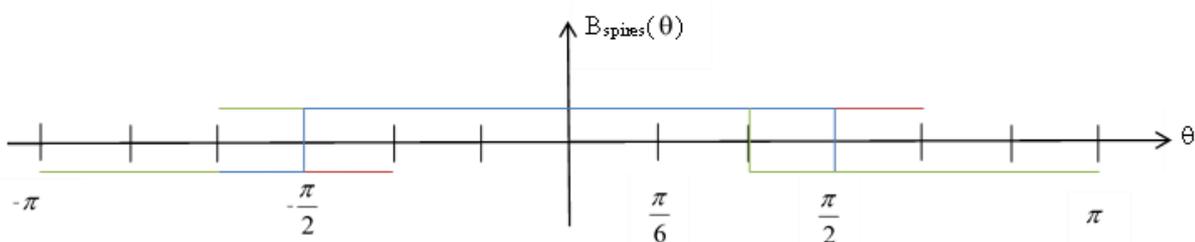
Q33)  $\oint_{Ldc} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1(t)$  d'où  $H_{air} * 2e + H_{fer} * L_{fer} = i_1(t)$

Q34)  $\frac{B}{\mu_0} * 2e + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} * L_{fer} = i_1(t)$  qui devient  $\frac{B}{\mu_0} * 2e \approx i_1(t)$  et  $B = \frac{\mu_0 i_1}{2e}$ .

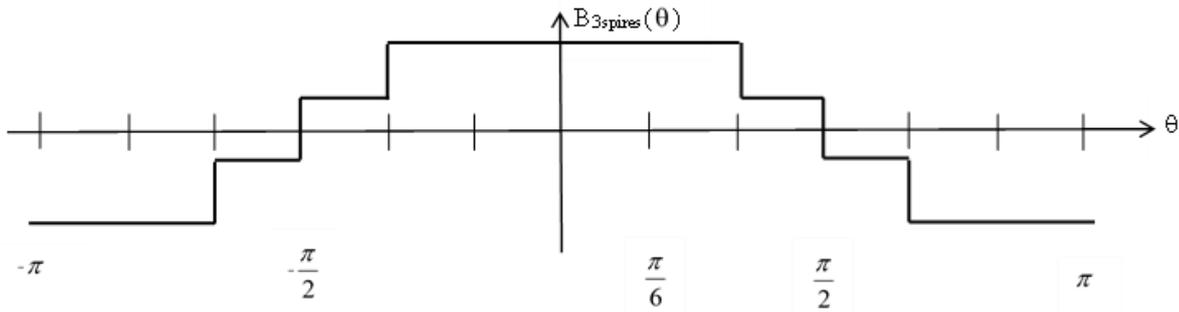
Q35) Graphe :



Q36) On additionne les champs créés par les trois spires décalées de  $\frac{\pi}{6}$



On obtient :



Q37)  $\vec{B}_s = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = K I_{max} [\cos(\omega_s t) \cos \theta + \sin(\omega_s t) \sin \theta] \vec{e}_r$

$\vec{B}_s = K I_{max} \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r = B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r.$

La dépendance en  $\omega_s t - \theta$  montre qu'il s'agit d'un champ tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega_s \vec{e}_z$ .

Q38)  $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{entrefer}} (\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2 dt$

Q39)  $R_e \cdot L_e \cdot e$  est en  $m^3$ .  $R_e$  et  $L_e$  correspondent au rayon de l'entrefer et à la longueur de l'entrefer.

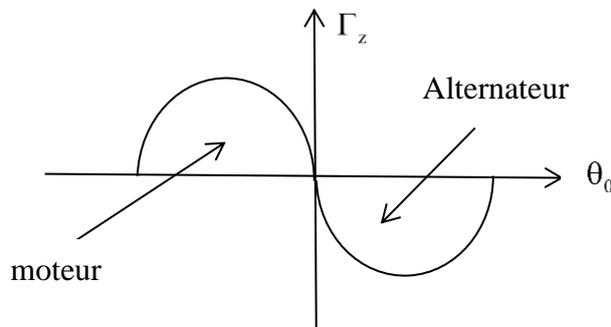
Q40)  $\Gamma_z(t) = \frac{R_e \cdot L_e \cdot e}{2\mu_0} \cdot 2\pi B_{r0} B_{s0} \sin(\omega_s t - \theta_R(t))$

$\Gamma_z(t) = \frac{\pi \cdot R_e \cdot L_e \cdot e}{\mu_0} B_{r0} B_{s0} \sin((\omega_s - \Omega)t - \theta_0)$

Q41) On a un couple moyen non nul si  $\omega_s = \Omega$ , c'est la condition de synchronisme.

On a n :  $\Gamma_{moyen} = \frac{-\pi \cdot R_e \cdot L_e \cdot e}{\mu_0} B_{r0} B_{s0} \sin(\theta_0).$

Q42) Le comportement alternatif correspond à  $\Gamma_{moyen} < 0$ , soit  $\theta_0 \in ]0, \pi[$ .



Zone moteur :  $\theta_0 \in ]-\pi, 0[$  et zone alternateur  $\theta_0 \in ]0, \pi[$

On a un fonctionnement moteur si  $\Gamma_{moyen} > 0$ .

Pour un fonctionnement moteur stable, il faut que sur une perturbation frein, (le rotor prend du retard et  $\theta_0$  diminue),  $\Gamma_{zmoyen}$  augmente et que sur une perturbation motrice (le rotor prend du

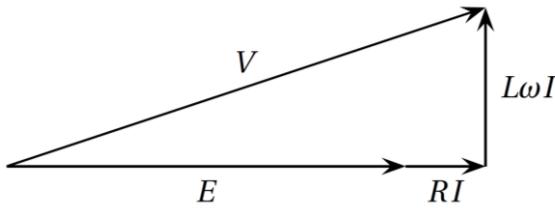
l'avance et  $\theta_0$  augmente),  $\Gamma_{zmoyen}$  diminue soit  $\theta_0 \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ .

Moteur stable :  $\theta_0 \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ .

**F.Extrait Mines Ponts psi 2017.**

16)  $f = 4 * 1500/60 = 100\text{Hz}$ .

17)



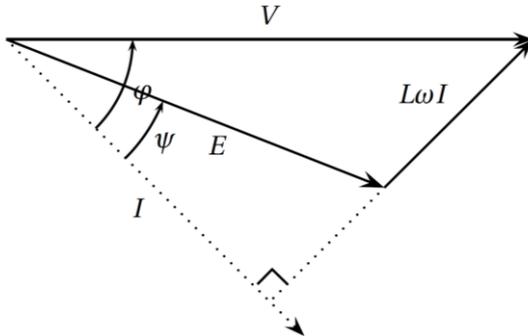
$$E + RI = 62,5V \quad L\omega I = \sqrt{V^2 - (E + RI)^2} = 35V \quad \text{d'où } L = 0,3\text{mH}.$$

18)  $\Phi_0$  s'exprime en Wb ou  $\text{Tm}^2$  et est représenté un flux de champ magnétique..

Elle dépend du bobinage du stator (section, nombre de spires), du champ créé par le rotor donc celui de l'aimant permanent.  $E = \Phi_0 \omega = \Phi_0 p \Omega$  soit  $A = p \Phi_0$ .

Dans l'essai 1 à vide,  $E = V$ ,  $A = 0,36\text{Wb}$ .

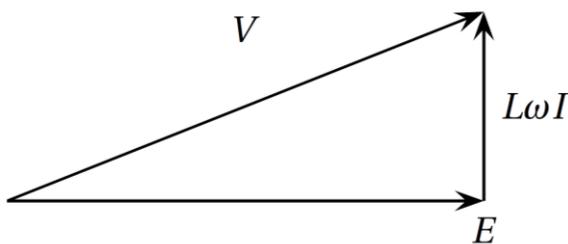
19) Les projections de  $V$  et  $E$  sur  $I$  sont identiques:  $V \cos(\varphi) = E \cos(\psi)$



20)  $P = VI \cos(\varphi) = EI \cos(\psi)$ . Il ya deux bobinages (cf description) donc  $P_a = 2P$ . Comme il y a transfert électromécanique total, on a  $P_m = 2P$ .

21)  $P_m = C\Omega$  soit  $C = 2AI \cos(\psi)$ . Pour maximiser le couple, on peut jouer sur l'angle  $\psi$ . Le couple est maximum pour  $\psi = 0$  et vaut  $C_{\max} = 2AI$ . Le couple ne dépend que du courant comme dans le cas de la MCC.

22)



$$V = \sqrt{E^2 + (L\omega I)^2} = 64V \quad \tan \varphi = \frac{L\omega I}{E} \quad \text{d'où } \varphi = 27^\circ$$

**G. Moteur à courant continu.**

1a) La première équation est la LDM comprenant l'aspect résistif et autoinductif du circuit électrique et la fcm  $E = \phi_o \omega$ . La seconde est le TMC en projection sur l'axe de rotation,  $\phi_o i$  étant le couple moteur, l'autre terme étant un couple résistant fluide.

En notation de Laplace, dériver par rapport au temps revient à multiplier par  $p$ . En éliminant le courant entre les deux équations, on obtient la fonction de transfert reliant l'alimentation électrique à la vitesse de rotation du moteur :

$$H(p) = \frac{\phi_o}{\phi_o^2 + (R + pL)(\lambda + Jp)}$$

Filtre passe-bas d'ordre 2. Le moteur atténue les perturbations HF de la tension d'alimentation, ce qui justifiera l'utilisation d'un hacheur pour l'alimentation.

1b) On néglige l'aspect auto-induction et les frottements fluides, ce qui a le grand intérêt d'obtenir un système linéaire d'ordre 1. On obtient l'équation différentielle :

$$\omega + \tau \dot{\omega} = \omega_{lim} \text{ avec } \tau = \frac{RJ}{\phi_o^2} = 0,4s \text{ et } \omega_{lim} = \frac{E}{\phi_o} = 100 s^{-1}$$

Avec les CI fournies, la solution est :  $\omega(t) = \omega_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$ .

2) Il faut ajouter  $-\Gamma_r$  dans le TMC si  $\omega > 0$  (sinon il faut mettre  $+\Gamma_r$ ) et l'équation précédente devient alors :

$$\omega + \tau \dot{\omega} = \omega'_{lim} \text{ avec } U_{min} = \frac{R\Gamma_r}{\phi_o} = 2V \text{ et } \omega'_{lim} = \frac{E - U_{min}}{\phi_o} = 80 s^{-1}$$

On voit alors que  $\omega > 0$  ne peut exister que si  $E > U_{min} = 2V$ . Pour une alimentation de 10V, la vitesse angulaire limite est alors  $80s^{-1}$ , soit une baisse de 20%.

3a) ne doit pas poser de pb.

b) La structure de l'équation est la même que précédemment, vous devez reconnaître le temps de réponse  $\tau'$  du système et la valeur limite  $\omega''_{lim}$  de rotation.

Plus K est grand, plus le temps de réponse du moteur est faible, plus la vitesse limite est indépendante du couple résistant.

c) En prenant  $\Gamma_r = 0$ , on obtient  $E_1 = 12,5V$  pour une vitesse de rotation de  $100s^{-1}$ , comme dans la question 1.

d) Si maintenant, on ajoute le couple résistant précédent, on calcule une nouvelle vitesse limite de  $96s^{-1}$  soit une baisse de 4%, à comparer avec la baisse de 20% sur le système non bouclé.