Fonctions vectorielles et équations différentielles

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts et n un entier naturel non nul. On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions $f : I \to \mathbb{R}^n$, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Interprétation : soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- ◇ le couple (I, f) est une courbe paramétrée tracée dans $\mathbb{R}^n$.
- ◇ l'ensemble $\Gamma = f(I) = \{u \in \mathbb{R}^n | \exists t \in I, u = f(t)\}$ est le support de la courbe paramétrée par (I, f)

I Dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle

1. Dérivée ponctuelle

Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et t_0 un point de I. Si la fonction $h \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0))$ admet une limite en 0, on dit que f est **dérivable en** t_0. Dans ce cas, on note

$$f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0))$$

le **vecteur dérivé** de f en t_0.

Remarque(s) :

(I.1) f est dérivable en t_0 si et seulement si la fonction $\tau_{t_0} : \begin{cases} I\backslash\{t_0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$ est prolongeable par continuité en t_0.

Propriété [I.1] : Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_1(t_0)$, ie si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0) + ha + o(h)$$

Conséquence [I.2] : Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0.

Propriété [I.3] : Soient $t_0 \in I$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I, f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en t_0.

Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0)e_i$.

2. Fonctions dérivables sur I

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point t_0 de I. Dans ce cas, on note f' la **fonction dérivée de** f définie par

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t_0 & \longmapsto & f'(t_0) \end{array}$$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque(s) :

(I.2) La fonction f' est, comme f, une fonction à valeurs vectorielles : $f'(I) \subset \mathbb{R}^n$.

(I.3) On a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. L'inclusion est stricte ; c/ex : $t \mapsto |t|x$ si $x \in \mathbb{R}^n$ est non nul.

Propriété [I.4] : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Propriété [I.5] : Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, ie telles que $\forall t \in I, f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$. Alors $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^n$ et dans ce cas,

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t) e_i.$$

Propriété [I.6] : (Composition par une application linéaire)
Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ linéaire. Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ alors $u \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et

$$\forall t \in I, (u \circ f)'(t) = u \circ (f')(t) = u(f'(t))$$

Propriété [I.7] : (Composition par une application multilinéaire)

1. Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ bilinéaire. La fonction $B(f, g)$, définie par $B(f, g) : t \in I \longmapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, B(f, g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

2. Soient $f_i \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^{n_i})$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, et $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application p-linéaire. Alors l'application définie par $M(f_1, \dots, f_p) : t \in I \longmapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, M(f_1, \dots, f_p)'(t) = \sum_{i=1}^{p} M(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t))$$

Conséquence [I.8] :

1. Si $(f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)^2$ et si $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. alors $(f|g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, (f|g)'(t) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$$

2. Si $(f_1,\dots,f_n)\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)^n$ et si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_n)\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et

$$\forall t\in I, \det_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_n)'(t)=\sum_{i=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}(f_1(t),\dots,f_{i-1}(t),f_i'(t),f_{i+1}(t),\dots,f_n(t))$$

Remarque(s) :

(I.4) Si $f\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$ est telle que $\forall x\in I, f(x)\neq 0$ alors $\|f\|\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $\|f\|'=\dfrac{(f|f')}{\|f\|}$.
Un mouvement non stationnaire (ie tel que f' ne s'annule pas) $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ est uniforme si et seulement si $\forall t\in I, f'(t)\perp f''(t)$.

Conséquence [I.9] : Soient $f\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$ et $\lambda\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ alors $\lambda f\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$ et

$$\forall t\in I, (\lambda f)'(t)=\lambda'(t)f(t)+\lambda(t)f'(t)$$

Propriété [I.10] : Soient $f\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$, $\varphi : J\to\mathbb{R}$ dérivable sur J, un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\varphi(J)\subset I$ alors $f\circ\varphi$ est dérivable sur J et

$$\forall t\in I, (f\circ\varphi)'(t)=\varphi'(t)\times f'\circ\varphi(t)$$

Propriété [I.11] : (Caractérisation des fonctions constantes)
Soit $f : I\to\mathbb{R}^n$ continue sur I et dérivable sur $\overset{o}{I}$, l'intérieur de I. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si et seulement si } f'=0 \text{ sur } \overset{o}{I}$$

3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition : Soit $f : I\to\mathbb{R}^n$

1. On note $f^{(0)}=f$ et pour $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k+1)}=\left(f^{(k)}\right)'$ si $f^{(k)}$ est dérivable sur I. $f^{(k)}$ est alors la **dérivée** $k^{\text{ème}}$ **de** f **sur** I.
2. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^k$ **sur** I si f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I. On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
3. On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout entier $k\in\mathbb{N}$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}^n)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété [I.12] : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ et

$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall(f,g)\in\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)^2, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, (\alpha f+\beta g)^{(k)}=\alpha f^{(k)}+\beta g^{(k)}$$

Propriété [I.13] : Soient $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $f\in\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ et $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ linéaire. Alors $u\circ f\in\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^p)$ et, pour $j\leqslant k$, on a

$$(u\circ f)^{(j)}=u\circ\left(f^{(j)}\right)$$

Propriété [**I.14**] **: (Formule de Leibniz)**
Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ bilinéaire. Alors $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour $j \leqslant k$, on a

$$B(f,g)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B(f^{(i)}, g^{(j-i)})$$

Propriété [**I.15**] **:** Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur J. Si $\varphi(J) \subset I$ alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

II Équations différentielles linéaires

1. Rappels sur les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition : Soient α, β, γ trois applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. L'équation $(\mathcal{E}) : \alpha y' + \beta y = \gamma$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 1.
2. Une **solution** de $(\mathcal{E})$ est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$$

3. L'équation $(\mathcal{E}_H) : \alpha y' + \beta y = 0$ est l'**équation homogène associée**.

Propriété [**II.1**] **:**

1. L'ensemble E_H des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
2. Si y_p est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ alors l'ensemble E des solutions de $(\mathcal{E})$ est $E = y_p + E_H$, un sous-espace affine de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ si et seulement si } y = y_0 + y_p \text{ avec } y_0 \text{ une solution de } (\mathcal{E}_H)$$

Remarque(s) :

II.1 Si la fonction α ne s'annule pas sur I, y est solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma$ si et seulement si y est solution de $y' - ay = b$ avec $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$; a et b sont alors continues sur I.

Théorème [**II.2**] **:** Soit a une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y' - ay = 0$ sont les fonctions définies sur I par

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $t \longmapsto A(t)$ est une **primitive** de a sur I.
Cela signifie que l'ensemble E_H des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{A(t)}$

$$E_H = \mathrm{Vect}\{t \mapsto e^{A(t)}\}$$

Propriété [**II.3**] **: (Méthode de la variation de la constante)**
Soient a et b deux fonctions continues sur I et y_0 une solution non nulle de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y' - ay = 0$.
Il existe une solution de l'équation $y' - ay = b$ de la forme

$$y_p = \lambda \times y_0, \text{ où } \lambda \text{ est une fonction dérivable sur } I.$$

Remarque(s) :

(II.2) La méthode de variation de la constante n'est pas la seule façon de trouver une solution particulière : on peut chercher une solution « évidente », une solution polynômiale, ou DSE ...

Conséquence [II.4] : (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Attention : Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut commencer par mettre l'équation sous forme résolue, ie avec un coefficient égal à 1 devant y'.

Exemple(s) :

(II.3) Résoudre $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(II.4) Résoudre $2tx' + x = e^t$ sur $\mathbb{R}^+$.

(II.5) Application aux systèmes différentiels : résoudre $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$

2. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition : Soient α, β, γ et δ quatre applications définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'équation $(\mathcal{E}) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 2. Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$$

L'équation $(\mathcal{E}_H) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ est l'**équation homogène associée**.

Remarque(s) :

(II.6) Si la fonction α ne s'annule pas sur I, y est solution de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ si et seulement si y est solution de $y'' - ay' - by = c$ avec $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, $b = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ et $c = \dfrac{\delta}{\alpha}$; a, b et c sont alors continues sur I.

Théorème [II.5] : (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soient a, b et c trois applications continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - ay' - by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Attention : Là encore, pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz il faut commencer par mettre l'équation sous forme résolue, ie avec un coefficient égal à 1 devant y''.

Conséquence [II.6] : Soient a et b deux applications continues sur un intervalle I. Si E_H est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y'' - ay' - by = 0$,

1. L'application $\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} E_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(\alpha), y'(\alpha)) \end{array}$ est un isomorphisme.

2. E_H est un espace-vectoriel de dimension 2.

3. L'ensemble E des solutions de l'équation complète est un sous-espace affine de dimension 2 : $E = y_p + E_H$, où y_p est une solution de l'équation avec second membre $(\mathcal{E})$.

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ si et seulement si } y = y_0 + y_p \text{ avec } y_0 \text{ une solution de } (\mathcal{E}_H)$$

Remarque(s) :

(II.7) L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est toujours un espace vectoriel mais c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure qu'il est de dimension 2.

Exemple(s) :

(II.8) Résoudre $t^2x'' + x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en cherchant les solution de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

(II.9) Soient q et f deux fonctions paires continues sur $\mathbb{R}$ et y une solution de $y'' + qy = f$. Montrer que y est paire si et seulement si $y'(0) = 0$.

Propriété [II.7] : Cas des équations à coefficients constants (rappels) :
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_H) : ay'' + by' + cy = 0$ sont définies, sur $\mathbb{R}$, par

$$y(x) = \begin{cases} \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} & \text{si } \Delta \neq 0 \text{ et } aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) \\ e^{rx}(\alpha x + \beta) & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } aX^2 + bX + c = a(X - r)^2 \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

2. Cas d'un second membre exponentiel-polynôme : soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{C}$. Il existe une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$ de la forme $y : t \mapsto t^\alpha Q(t) e^{mt}$ avec

$$\begin{cases} Q \in \mathbb{C}[X] \\ \deg(Q) = \deg(P) \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } am^2 + bm + c \neq 0 \\ 1 & \text{si } \Delta \neq 0 \text{ et } am^2 + bm + c = 0 \\ 2 & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } am^2 + bm + c = 0 \end{cases}$$

Exemple(s) :

(II.10) Résoudre $y'' + y = \cos^3 x$.

(II.11) Résoudre $4tx'' + 2x' - x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en utilisant le changement de variable $t = u^2$; puis sur $\mathbb{R}$.

Propriété [II.8] : Compléments (hors-programme) **sur les équations différentielles linéaires d'ordre** 2
Soient a, b, c continues sur I, $(\mathcal{E})$ l'équation $y'' + ay' + by = c$ et $(\mathcal{E}_H)$ l'équation homogène associée.

1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$ alors $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ est dérivable sur I et vérifie $w' = -aw$.
Les fonctions y_1 et y_2 sont libres si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$ et dans ce cas on a $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

2. Si y_0 est une solution de $(\mathcal{E}_H)$ qui ne s'annule pas sur I alors $y = \alpha y_0$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si α' (la dérivée de α) est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 (d'inconnue y) : $y' + \left(a + 2\dfrac{y_0'}{y_0}\right) y = \dfrac{c}{y_0}$.

Remarque(s) :

(II.12) Pour résoudre complètement une équation linéaire du second ordre, il suffit de trouver une solution non nulle de $(\mathcal{E}_H)$.

(II.13) La fonction w (appelée wronskien) est souvent utile quand on cherche à étudier une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (cf dernier exemple ci-dessous).

Exemple(s) :

(II.14) Résoudre $-t^2x'' + t(2 + t)x' - (2 + t)x = -2t^3(t + 1)e^t$ en commençant par chercher les solutions polynômiales de l'équation homogène.

(II.15) Résoudre $xy'' + 2y' - xy = 0$ en cherchant les solutions DSE.

(II.16) Soient q continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $(\mathcal{E}) : y'' + qy = 0$.

1. Montrer que si y est une solution bornée de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$.

2. Montrer qu'il existe une solution de $(\mathcal{E})$ non bornée.