I Équations d'ordre 1

Exercice 1 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Trouver α, β, γ tels que $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+1} + \dfrac{\gamma}{t-1}$
2. Résoudre $t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

Exercice 2 **(Centrale PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $(E) : 2x(1+x)y' + (1+x)y = f(x)$

1. On suppose $f = 1$; résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et $]-1, 0[$ et donner les solutions sur $]-1, +\infty[$.
2. On suppose f DSE avec $R \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une solution DSE de rayon $\geqslant 1$ et exprimer ses coefficients en fonction de ceux de f.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$

1. Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide d'une intégrale
3. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Exercice 4 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $(E) : x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0 et donner un $\mathrm{DL}_1(0)$ de f.
   indication : pour le $DL_1(0)$, IPP en introduisant $\dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}$
2. Déterminer les solutions DSE de (E).
3. Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

1. Résoudre sur $]-1, 1[$, $(1-t^2)y''(t) - 2ty'(t) = 0$
2. Trouver les fonctions f non constantes et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que, si $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $y' - y = f$ admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.
2. (dur !) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et relier $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$.
   indication : montrer que $\lim\limits_{\pm\infty} F = 0$; pour la limite en $-\infty$, introduire $\varepsilon > 0$ et x_0 tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} |f| < \varepsilon$.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$
   indication : poser $\varphi = f' + af$ et résoudre $y' + ay = \varphi$ de façon à trouver f en fonction de φ. Ensuite utiliser la définition de limite avec ε
2. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} g'' + g' + g = 0$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   indication : appliquer la première question à $h = f' + bf$ avec b bien choisi

Exercice 8 **(CCP PSI 2014)** *[Solution]*
On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ϕ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. Décrire $\ker \phi^2$.

Exercice 9 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que si P est un polynôme impair alors $-y' + xy = P$ admet une unique solution polynômiale $u(P)$.
2. Que dire de la parité de $u(P)$? Les résultats subsistent-ils si P est pair ?
3. Montrer que f qui à $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ associe $Xu(P)$ est un endomorphisme de l'ensemble des polynômes impairs de degré $\leqslant 2n+1$, dont on donnera la matrice dans la base canonique.

Exercice 10 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue bornée, telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2+f(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

indication : prouver que si f est solution alors f est $\mathcal{C}^1$ puis calculer $F(f)$ où $F : x \mapsto 2x + \frac{1}{3}x^3$ et utiliser la bijectivité de F.

II Systèmes différentiels

Exercice 11 *[Solution]*

Résoudre les systèmes $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

Résoudre $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + y + z \\ z' = -2x + 3y - z \end{cases}$

Exercice 13 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exercice 14 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_{a,b,c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} cbe^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$. Soit $F = \{f_{a,b,c}\ ;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. Déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall f \in F \forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = Bf(t)$.

Exercice 15 **(CCP PSI 2022)** *[Solution]*

1. Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, donner une matrice de passage P.
2. Résoudre $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Exercice 16 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

Soit l'équation différentielle $(E) : x^{(3)} = 5x'' - 7x' + 3x$. On pose $X = {}^t\begin{pmatrix} x & x' & x'' \end{pmatrix}$.

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis trouver les solutions de (E).

Exercice 17 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*

Résoudre $\begin{cases} x'' = 3x - 2y \\ y'' = 4x - 3y \end{cases}$

Exercice 18 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*

Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t.
2. Montrer, pour $Y \in \ker(A)$ que $(X(t)|Y)$ ne dépend pas de t.

3. Montrer que $X(t)$ est sur un cercle.

Exercice 19 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
On définit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \det(M) = 1\}$. Soient A et B dans G, de même trace α.

1. a) Donner une condition suffisante sur α pour que A soit diagonalisable. Est-elle nécessaire ?
   b) Donner une condition suffisante sur α pour que A et B soient semblables. Est-elle nécessaire ?

Soit ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$; on a donc, pour tout t, $\phi'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ montrez que l'application $t \to M\phi(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et précisez sa dérivée.

3. Soit $A \in G$ de trace nulle. Montrez l'existence de ϕ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans G vérifiant

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t), \phi(0) = I_2 \text{ et } \phi'(0) = A.$$

III Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 20 *[Solution]*
Résoudre

1. $x'' + 2x' + x = te^{-t}$.

2. $x'' - 4x' + 3x = 6t + 1 + 4e^t + 8e^{-t}$.

3. $x'' + 4x = 8t\sin^2 t$.

Exercice 21 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}$ $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$

Exercice 22 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
On définit $(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$.

2. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$.
indication : il existe φ tel que $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$

3. Étudier les variations de $\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit x vérifiant (E). Montrer que l'application qui à t associe $\dfrac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$ est bornée et atteint sa borne supérieure.
Atteint-elle sa borne inférieure ?

Exercice 23 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*
Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(\alpha - x)$.
indication : montrer qu'elles sont deux fois dérivables.

Exercice 24 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(E) : y'' - 9y = 3a|x| + b$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution admettant des asymptotes en $\pm\infty$.

Exercice 25 **(ENTPE-EIVP MP 2007)** *[Solution]*
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 26 **(Centrale PC 2014)** *[Solution]*
Trouver les fonctions f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, telles que $f(0) = 2$ et $f'(x) - 5\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 10$.

Exercice 27 **(Navale PSI 2010)** *[Solution]*
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et f $\mathcal{C}^0$ et bornée sur $\mathbb{R}$; montrer que $y'' - a^2y = f$ admet une unique solution continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
indication : utiliser les compléments du cours pour trouver une solution particulière.

Exercice 28 **(Mines-Ponts PSI 2012)** *[Solution]*
Soit f $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + f \geqslant 0$; montrer que $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$ pour tout x.
indication : résoudre de $y'' + y = g$ avec les compléments du cours pour la solution particulière puis remplacer g par $f'' + f$
.

Exercice 29 *[Solution]*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et y une solution définie sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = a \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $y \leqslant a$.
indication : montrer que y est concave (ie y' décroît).
2. Déterminer y si $a \leqslant 0$.
3. On suppose $a > 0$. Montrer que y possède exactement deux zéros $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Déterminer y.
indication : déterminer y sur les trois intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$

IV Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Exercice 30 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0).
2. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2z(x)$.
3. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^+$.
4. Résoudre $x^2y'' - 2y = x^3$

Exercice 31 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Donner les solutions polynômiales de $(x^2-1)y''(x) + 2xy' - 2y = 0$.
2. On pose $y(x) = xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z
3. Déterminer a, b, c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $]-1, 1[$.

Exercice 32 **(ENSAM PSI 2010)** *[Solution]*

1. Trouver les solutions de la forme x^α de l'équation homogène associée à $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$.
2. Trouver toutes les solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ après avoir vérifié que $x \mapsto x^2\ln(x)$ est une solution.
Existe-t-il des solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}$?

Exercice 33 **(CCP MP 2010)** *[Solution]*
Résoudre $\left(1-x^2\right)y'' - 3xy' - y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. On pourra vérifier que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation homogène puis poser $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 34 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*
Résoudre $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.
indication : trouver une solution y_0 non nulle de l'équation homogène et poser $y = y_0 \times z$.

Exercice 35 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geqslant 0, x^2f(x) = 2\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
2. Montrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une équation différentielle d'ordre 2
3. Trouver f

V Changements de variables

Exercice 36 **(EIVP PSI 2017)** *[Solution]*
Résoudre $y'' + \dfrac{1}{t^2}y = 0$ en posant $t = e^x$. En déduire les solutions de $f'(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Exercice 37 **(Mines-Ponts PC 2011)** *[Solution]*
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x}$ en posant $x = e^t$.

Exercice 38 **(CCP PC 2006)** *[Solution]*
Soit $(E) : xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $Y : x \mapsto y(\sqrt{x})$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathbb{R}^{-*}$.
3. Trouver les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Résoudre sur $]-1,1[$, $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$.
indication $t = \sin\theta$.

Exercice 40 *[Solution]*
Résoudre par changement de variable les équations

1. $(x^2+1)y'' + xy' - 4y = 0$.
2. $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 2x^2$ sur $]-1,1[$.

indication : chercher φ telle que si $y = z \circ \varphi$, z vérifie une équation que vous savez résoudre.

VI Résolutions avec DSE

Exercice 41 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

1. Trouver une solution polynômiale non nulle P de $x^2y'' + xy' - y = 0$ puis trouver les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
indication : poser $y = P \times z$.
2. On suppose que $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n x^n$ est solution de $x^2y'' + xy' - y = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Exprimer les a_n en fonction des b_n et déterminer une condition sur les a_n pour qu'une telle solution existe.

Exercice 42 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Résoudre sur $[0,\pi]$ $xy'' + 2y' + xy = 0$ en cherchant une solution DSE y_0 non nulle et en posant $y = y_0 \times z$.

Exercice 43 **(Mines-Ponts PSI 2012)** *[Solution]*
Trouver les solutions DSE de $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ puis résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 44 **(ENSAM PSI 2010)** *[Solution]*

1. Trouver une solution y_0 non nulle et DSE de $4xy'' + 2y' - y = 0$.
2. Trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{x})}$ et en déduire les solutions de l'équation considérée en posant $y = y_0 \times z$.

Exercice 45 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 1$.
indication : chercher les solutions DSE de l'équation homogène, ou de l'équation complète ou bien reconnaître le premier membre de l'équation.

Exercice 46 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Rappeler le DSE de arctan
2. Soit $(E) : (1+x^2)y'' - 2y = 0$
   a) Trouver une solution polynômiale de (E).
   b) Trouver une solution DSE (non polynômiale) de (E).
   c) Résoudre (E)

Exercice 47 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
On cherche y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $-2y'' + xy' - y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$

1. Y a-t-il existence et/ou unicité au problème posé ? Donner une valeur explicite de y.
2. On rappelle $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et trouver une équation différentielle vérifiée par f. Conclure.

Exercice 48 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $(E) : 2xy'(x) + y(x) = 3x\varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}((-x)^{3/2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E)
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis sur $\mathbb{R}$

VII Études qualitatives des solutions

Exercice 49 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*

1. Soit a continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. A-t-on $\lim\limits_{+\infty} a = 0$?
2. On pose $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est solution de $(E) : y''(x) + (1+a(x))y(x) = 0$. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g'' + g = 0$.
3. En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que $|f(x)| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.
   indication : étudier $h(x) = \ln\left(c + \displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 50 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leqslant M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$.
   On pose $F(t) = M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ et $G(t) = \exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.
   En calculant la dérivée de $\dfrac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leqslant M \exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.
3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
   a) Soit y une solution de (E). Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.
   indication : poser $z(t) = -\displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ *et calculer* z''.
   b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Exercice 51 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que $(E) : y'' = (1+x^4)y$ admet une unique solution f telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet que f^{-2} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $g : x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}$ est solution de (E).
3. Montrer que f^{-2} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   indication : en supposant que f s'annule sur $\mathbb{R}^+$, introduire $\alpha = \sup\{a \geqslant 0, \forall t \in [0, a], f(t) > 0\}$ et aboutir à une absurdité ; puis en utilisant $f'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$, démontrer que $f(x) \geqslant 1 + x$.

Exercice 52 **(Telecom SudParis PSI 2014)** *[Solution]*
Soient a_1 et a_2 continues sur $\mathbb{R}$, y_1 une solution de $y'' + a_1 y = 0$ et y_2 une solution de $y'' + a_2 y = 0$. On suppose $a_1 < a_2$ et qu'il existe $\alpha < \beta$ tels que $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$ et $y_1 > 0$ sur $]\alpha, \beta[$.
Montrer qu'il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $y_2(\gamma) = 0$. (on pourra raisonner par l'absurde et étudier y_2/y_1)

Exercice 53 *[Solution]*
Soit p une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs négatives et (E) l'équation différentielle $y'' + py = 0$. Soit f une solution non nulle de (E) ; on suppose que f s'annule en x_0.

1. Montrer que $f'(x_0) \neq 0$ et en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) \neq 0$.
2. On suppose que f s'annule sur $]x_0, +\infty[$. Montrer que f possède dans $]x_0, +\infty[$ un plus petit zéro noté x_1.
3. En examinant les signes de $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$ aboutir à une contradiction et en déduire que toute solution de (E) s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
   indication : on pourra supposer $f > 0$ sur $]x_0, x_1[$.

Exercice 54 **(Mines-Ponts MP 2010)** *[Solution]*
Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $q \leqslant 0$; montrer que f solution non nulle de $y'' + q(x)y = 0$ s'annule au plus une fois.
indication : raisonner par l'absurde et étudier la convexité (variations de f').

Exercice 55 **(X-ESPCI PC 2011)** *[Solution]*

1. Montrer que si y est une solution bornée de $y'' + \dfrac{x}{1+x^3}y = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$.
   indication : montrer que y'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

2. Montrer qu'il existe une solution non bornée.
indication : s'il existe f *et* g *libres et bornées, étudier* $w = f'g - fg'$.

Exercice 56 **(Mines-Ponts PSI 2007)** *[Solution]*
On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, on note (E_f) l'équation différentielle $y'' - y = 2f$.

1. Justifier l'existence et l'unicité dans E d'une solution $\phi(f)$ de (E_f) telle que $\phi(f)(0) = \phi(f)'(0)$ et $\phi(f)(1) = -\phi(f)'(1)$.
indication : utiliser les compléments du cours pour trouver une solution particulière et l'expression de $\phi(f)$.

2. Montrer que ϕ est un endomorphisme continue de $(E, \|.\|_\infty)$.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{t(t^2-1)}=\dfrac{-1}{t}+\dfrac{1/2}{t+1}+\dfrac{1/2}{t-1}$

2. Sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, $x(t)=\alpha\dfrac{t^2}{t^2-1}+\dfrac{t^2}{t^2-1}\ln|t|$.

Sur $]-1,1[$, $x(t)=\begin{cases}\alpha\dfrac{t^2}{t^2-1}+\dfrac{t^2}{t^2-1}\ln(-t) & \text{sur }]-1,0[\\ 0 & \text{si } t=0\\ \beta\dfrac{t^2}{t^2-1}+\dfrac{t^2}{t^2-1}\ln(t) & \text{sur }]0,1[\end{cases}$ puis, sur $\mathbb{R}^{+*}$, la seule solution dérivable en 1 (idem en -1) est $x(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1} & \text{si } t\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t=1\end{cases}$ et sur $\mathbb{R}$ entier la seule solution est $x(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2\ln|t|}{t^2-1} & \text{si } t\notin\{0,1,-1\}\\ 0 & \text{si } t=0\\ 1/2 & \text{si } t=\pm 1\end{cases}$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** Sur $]0,+\infty[$, $y(x)=\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$; sur $]-1,0[$, $y(x)=\dfrac{\beta}{\sqrt{-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.
Recollement sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha=\beta=0$ (avec $y(0)=1$)

2. Si $f(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ et $y(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ (avec $R>0$), on vérifie $2x(1+x)y'(x)+(1+x)y(x)=b_0+\sum\limits_{n\geqslant 1}[(2n+1)a_n+(2n-1)a_{n-1})x^n]$ donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $\begin{cases}b_0=a_0\\ b_n=-\dfrac{2n-1}{2n+1}b_{n-1}+\dfrac{a_n}{2n+1} & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}$ On en déduit $b_n=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ puis on vérifie $R_b\geqslant R_a=1$.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $y_0(x)=\dfrac{\alpha}{x^\lambda}$

2. $y(x)=\dfrac{1}{x^\lambda}\left(\alpha+\displaystyle\int_1^x\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)$

3. $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc la seule solution éventuellement bornée est pour $\alpha=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ donc $y(x)=\dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ qui est bien bornée car $|y(x)|\leqslant\dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x t^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** Les solutions sont $y(x)=\alpha e^{1/x}+e^{1/x}\displaystyle\int_0^x e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ (la primitive existe car $t\mapsto e^{-1/t}$ est prolongeable par continuité en 0.
$\left|\displaystyle\int_0^x e^{-1/t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant e^{1/x}xe^{-1/x}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ car $t\mapsto e^{-1/t}$ est croissante sur $[0,x]$; la seule fonction tendant vers 0 est donc $f(x)=e^{1/x}\displaystyle\int_0^x e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$.
Par IPP, on a $f(x)=e^{1/x}\displaystyle\int_0^x t^2\times\frac{1}{t^2}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t=\left[t^2e^{-1/t}\right]_0^x-2e^{1/x}\int_0^x te^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ et comme $\left|\displaystyle\int_0^x te^{-1/t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant x^2e^{-1/x}$, on a $f(x)=O(x^2)=0+o(x)$.

2. Si $R>0$ et $y(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ alors $x^2y'(x)+y(x)=a_0+\sum\limits_{n\geqslant 1}[(n-1)a_{n-1}+a_n]x^n$ donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0=a_1=0$, $a_2=1$ et $a_n=-(n-1)a_{n-1}$ pour $n\geqslant 3$; on trouve $a_n=(-1)^n(n-1)!$ donc $R=0$ (donc pas de sol DSE)

3. On montre par récurrence que $f(x)=P_n(x)+\alpha_ne^{1/x}\displaystyle\int_0^x t^ne^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ car $\displaystyle\int_0^x t^ne^{-1/t}\,\mathrm{d}t=\left[t^{n+2}e^{-1/t}\right]_0^x-(n+2)\int_0^x t^{n+1}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ donc $P_{n+1}=P_n+\alpha_nX^{n+1}$ et $\alpha_{n+1}=-(n+2)\alpha_n$. On a encore $\left|\displaystyle\int_0^x t^ne^{-1/t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant x^{n+1}e^{-1/x}$ donc $f(x)=P_n(x)+O(x^n)$ donne le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f.

Exercice 5 *[sujet]* **1.** $y(t)=\alpha\ln\dfrac{1-t}{1-t}+\beta$

2. $\dfrac{\partial^2g}{\partial x^2}(x,y)=-4\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)+4\dfrac{\sin^2 2x}{\operatorname{ch}^2 2y}f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2g}{\partial y^2}(x,y)=-2\cos 2x\left[\dfrac{2}{\operatorname{ch}2y}-4\dfrac{\operatorname{sh}^2 2y}{\operatorname{ch}^3 2y}\right]f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)+4\dfrac{\operatorname{sh}^2 2y\cos^2 2x}{\operatorname{ch}^4 2y}f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)$ donc $\dfrac{\partial^2g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2g}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{4}{\operatorname{ch}^2 2y}\left[\left(1-\dfrac{\cos^2 2x}{\operatorname{ch}^2 2y}\right)f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)-2\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\right)\right]$ donc on retombe sur la première question en posant $t=\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch}2y}\in]-1,1[$ car $|\cos 2x|\leqslant 1$ et $\operatorname{ch}2x>1$ si $y\in\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** Les solutions sont $y(x) = \alpha e^x + e^x \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$; la seule bornée est $F(x) = -e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ ($\alpha = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt$ sinon la limite en $+\infty$ n'est pas finie et cette intégrale CV car $e^{-t} f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t)))$ car on vérifie $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|$ donc bornée.

2. On commence par prouver que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F$ CV : par IPP $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$ donc il suffit de vérifier que $\displaystyle\lim_{+\infty} F = 0$, ce qui est justifié par $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. De l'autre côté, on a de même $\displaystyle\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -F(x) - \int_x^0 F(t)\,\mathrm{d}t$ puis, si $x < 0$, $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t + e^x C \leqslant 2\varepsilon$ si x grand avec $C = \displaystyle\int_{x_0}^0 e^{-t}|f(t)|\,\mathrm{d}t = Cte$. On a donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = -\int_{\mathbb{R}} F$. Pour finir, l'intégrabilité de F se prouve en remarquant que $|F(t)| \leqslant e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\,\mathrm{d}t = G(x)$; il suffit donc d'appliquer ce qui a été fait avec $|f|$ au lieu de f pour justifier la CV de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** on a $f(x) = f(0)e^{-ax} + e^{-ax} \displaystyle\int_0^x e^{au} \varphi(u)\,du$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(0)e^{-ax} = 0$ et, si $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|\varphi| < \varepsilon$ si $x > A$; on écrit alors $\left| e^{-ax} \displaystyle\int_0^x e^{au} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant e^{-\operatorname{Re}(a)x} \displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon e^{-\operatorname{Re}(a)x} \int_A^x e^{\operatorname{Re}(a)u}\,\mathrm{d}u \leqslant e^{-\operatorname{Re}(a)x} \displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon$ et il existe $B > A$ tel que $e^{-\operatorname{Re}(a)x} \displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u} |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u < \varepsilon$ pour $x > B$ (l'intégrale est une constante). Pour $x > B$, on a $\left| e^{-ax} \displaystyle\int_0^x e^{au} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \right| < 2\varepsilon$

2. on a $h' + af = f'' + (a+b)f' + abf$ donc on cherche a, b tels que $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=1 \end{cases}$; on prend $a = -j$ et $b = -j^2$. Comme $\operatorname{Re}(b) = \dfrac{1}{2} > 0$, on déduit de la première question $\displaystyle\lim_{+\infty} h = 0$ puis, comme $\operatorname{Re}(a) = \dfrac{1}{2} > 0$, $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** évident

2. $\phi(f) = \lambda f$ si f est solution de $y' - (x-\lambda)y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = \alpha e^{x^2/2 - \lambda x}$ (donc il y a des solutions non nulles ; $\operatorname{Sp}(\phi) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(\phi) = \operatorname{Vect}\left\{x \mapsto e^{x^2/2-\lambda x}\right\}$ est une droite.

3. $f \in \ker(\phi^2)$ si et seulement si $\phi(f) \in \ker(\phi)$ donc si et seulement si $\phi(f) = \alpha e^{x^2/2}$; f est donc solution de $y' - xy = \alpha e^{x^2/2}$ donc $f(x) = \beta e^{x^2/2} + \alpha x e^{x^2/2}$ donc $\ker(\phi^2) = \operatorname{Vect}\left\{x \mapsto e^{x^2/2}, x \mapsto xe^{x^2/2}\right\}$ est un plan

Exercice 9 *[sujet]* **1.** Les solutions sont $y(x) = \alpha e^{x^2/2} - e^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} P(t)\,\mathrm{d}t$; la seule solution polynômiale est $u(P) : x \mapsto e^{x^2/2} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} P(t)\,\mathrm{d}t$: calculer $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2/2}\,dt$ par IPP pour vérifier que c'est un polynôme ; les autres (avec $\alpha \neq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} P(t)\,\mathrm{d}t$) ne le sont pas car elles sont équivalentes en $+\infty$ à $\alpha e^{x^2/2}$.

2. $u(P)(-x) - u(P)(x) = e^{x^2/2} \displaystyle\int_{-x}^x P(t) e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 0$ par chgt de variable $u = -t$ (avec P impair) donc $u(P)$ est pair. Si $P = 1$ alors aucune solution n'est polynômiale car (même argument), la seule solution polynômiale possible serait $y(x) = e^{x^2/2} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ et on aurait alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = y(x) e^{-x^2/2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ ce qui est absurde car $e^{t^2/2} > 0$.

3. On vérifie par IPP que $f(X^{2k+1}) = \dfrac{1}{2} X^{2k+1} + k f(X^{2k-1})$ donc $f(X^{2k+1}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} X^{2i+1}$.

Exercice 10 *[sujet]* Si f est solution alors $f(0) = 2$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et $f'(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2 + f(x)^2}$ donc $f'(x)(2 + f(x)^2) = e^{-x^2}$ et en intégrant, on obtient $2f(x) + \dfrac{1}{3} f(x)^3 = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{20}{3}$. On pose $F : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{3}x^3$ et on vérifie que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; on en déduit $f(x) = F^{-1}\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{20}{3}\right)$, ainsi f est unique si elle existe. On vérifie réciproquement que pour une telle fonction f, F^{-1} est $\mathcal{C}^1$ (car F' ne s'annule pas) donc f aussi ; on a bien $f'(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2 + f(x)^2}$ et $f(0) = 2$ donc f est bien solution.

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et positive, $0 \leqslant \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = I$ donc $f \in F^{-1}\left(\left[0, I + \frac{20}{3}\right]\right)$ donc est bien bornée

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{5t} \end{pmatrix}$

2. $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{-2t} \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{4t} \end{pmatrix}$

3. $X(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ \beta \\ \beta t + \gamma \end{pmatrix}$

Exercice 12 *[sujet]* $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{-2t} \end{pmatrix}$

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ SARS

2. Si $A = P\mathrm{diag}(1,2,3)P^{-1}$ alors $X(t) = P\begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix}$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $F = \mathrm{Vect}\{f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}\}$ qui forment une famille libre donc F est un sev de dimension 3.

2. On a écrit $f_{a,b,c} = W(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $W(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & e^{-t} \\ 2 & -e^t & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$; on a alors $f'(t) = W'(t)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc si B existe elle vaut $B = W'(0)^{-1}W(0)$ et on vérifie que cette matrice convient.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = P\mathrm{diag}(1+t, 1-t)P^{-1}$

2. $X(t) = P\begin{pmatrix} \alpha e^{t+t^2/2} \\ \beta e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$

Exercice 16 *[sujet]* **1.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ puis $X(t) = P\begin{pmatrix} (\gamma + \beta t)e^t \\ \beta e^t \\ \alpha e^{3t} \end{pmatrix}$ donc $x(t) = (\gamma + \beta t)e^t + \alpha e^{3t}$

Exercice 17 *[sujet]* $X'' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ donc $Y'' = \mathrm{diag}(i, -i)Y$ puis

$X(t) = \begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \exp((1+i)t/\sqrt{2}) + \beta \exp((-1+i)t/\sqrt{2}) \\ \gamma \exp((1-i)t/\sqrt{2}) + \delta \exp((-1-i)t/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si $\varphi(t) = \|X(t)\|^2$ alors $\varphi'(t) = 2(X'(t)|X(t)) = 2(AX(t)|X(t)) = 0$ car $(AX|X) = (X|\,{}^tAX) = -(X|AX)$

2. si $\psi(t) = (X(t)|Y)$ alors $\psi'(t) = (X'(t)|Y) = (AX(t)|Y) = (X(t)|\,{}^tAY) = -(X(t)|AY) = 0$

3. ϕ est constante donc sur la sphère (centré en O) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi$. On a $A = -\,{}^tA$ donc $\det(A) = (-1)^3\det(A)$ puis $\det(A) = 0$; on choisit $Y \neq 0$ dans $\ker(A)$. On a alors $(X(t)|Y) = (X(0)|Y)$ donc $X(t) - X(0) \in \mathrm{Vect}\{Y\}^\perp$; la solution est donc dans le plan affine $P = X(0) + \mathrm{Vect}\{Y\}^\perp$. L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle (ou vide, mais c'est absurde car une solution X existe par C-Lip)

Exercice 19 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A = X^2 - \alpha X + 1$ donc si $\alpha^2 - 4 \neq 0$, $\mathcal{X}_A$ est SARS donc A est DZ. Ce n'est pas nécessaire car pour $A = I_2 \in G$, on a $\alpha = 2$ et A est DZ

b) Si $\alpha^2 - 4 \neq 0$, A et B sont DZ et semblables à la même matrice diagonale D donc sont semblables. Ce n'est pas nécessaire car $A = I_2$ et $B = I_2$ sont semblables avec $\alpha = 2$

2. Par composition pas $X \mapsto MX$ qui est linéaire, on a $f'(t) = M\phi'(t)$

3. Si ϕ est solution, on a $\phi'(s+t) = \phi'(s)\phi(t)$ pour tout (s,t) donc $\phi'(t) = \phi'(0)\phi(t) = A\phi(t)$. A est DZ, semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $A = PDP^{-1}$ donc $\phi(t) = P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}$ est une solution (et c'est en fait la seule).

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-t} + \dfrac{1}{2}t^2 e^{-t}$

2. $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{3t} + 2t + 3 - 2te^t + e^{-t}$

3. $8t\sin^2 t) = 4t + 4\,\mathrm{Re}(te^{2it})$ donc $x(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t) + t + \mathrm{Re}\left(\left(-it^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 2i\right)t\right)e^{2it}\right)$

Exercice 21 *[sujet]* Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y(x) = (ax+b)e^x + \dfrac{x^2}{2}e^x$, sur $\mathbb{R}^{-*}$, $y(x) = (ax+b)e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x}$ et sur $\mathbb{R}$, $y(x) = \begin{cases} (ax+b)e^x + \dfrac{x^2}{2}e^x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ \left[\left(a + \dfrac{1}{2}\right)x + b - \dfrac{1}{4}\right]e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $x(t) = e^{-t}\left(a\cos\dfrac{t}{\sqrt{5}} + b\sin\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right)$

2. Il existe φ tel que $x(t) = \sqrt{a^2+b^2}e^{-t}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}} + \varphi\right)$ donc $x(-2n\pi - \varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (car $a^2+b^2 \neq 0$) et il existe t tel que $|x(t)| > 1$; comme $\lim\limits_{+\infty} x = 0$, par le TVI, il existe t tel que $|x(t)| = 1$

3. $\phi'(t) = \dfrac{t(2-t^4)}{(1+t^4)^2}$ (et ϕ est paire)

4. ϕ est maximale en ± 1 donc $g :\mapsto \dfrac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$ atteint son max lorsque $|x(t)| = 1$. On a $g(t) \geqslant 0$ et $g(t) = 0$ lorsque x s'annule (ce qui arrive en $t = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$) donc le minimum est 0 (et donc atteint)

Exercice 23 *[sujet]* Si f est solution alors par composition f' est dérivable. f est donc solution si et seulement si $f'(0) = -f(\alpha)$ et $f''(x) = f'(\alpha - x) = -f(x)$ donc $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $a\cos\alpha + (1 - \sin\alpha)b = 0$ (discuter selon la valeur de α pour trouver le nombre de solutions de cette équation)

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Tous calculs faits, on trouve $y(x) = \begin{cases} \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x} - 3ax - b & \text{si } x \geqslant 0 \\ (\alpha - a)e^{3x} + (\beta + a)e^{-3x} + 3ax - b & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Si y admet une asymptote en $+\infty$ alors on a un des deux cas suivants :

— soit y tend vers une limite finie en $+\infty$, ce qui n'arrive que si $\alpha = 0$ et $a = 0$. Dans ce cas, on vérifie que $y = b$ est asymptote en $+\infty$.

— soit y tend en $+\infty$ vers $\pm\infty$ et $\dfrac{y(x)}{x}$ tend vers une limite non nulle en $+\infty$, ce qui n'arrive cette fois que si $\alpha = 0$ (et $a \neq 0$). La droite d'équation $y = 3ax + b$ est alors asymptote en $+\infty$.

En faisant de même en $-\infty$, on obtient dans le cas $a = 0$ la fonction avec $\alpha = \beta = 0$ avec $y = b$ asymptote horizontale en $\pm\infty$. Et dans le cas $a \neq 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -a$ qui donne la droite $y = 3a + b$ asymptote en $+\infty$ et $y = -3ax + b$ en $-\infty$.

Exercice 25 *[sujet]* Si f est solution alors f' est $\mathcal{C}^1$ donc f est solution si et seulement si $e^x = f''(x) - f'(-x) = f''(x) + f(x) - e^{-x}$ et $f'(0) + f(0) = 1$; on trouve $f(x) = a(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)$

Exercice 26 *[sujet]* Si f est solution alors $f'(x) = 10 + 5\cos(x)\displaystyle\int_0^x f \times \cos + 5\sin(x)\int_0^x f \times \sin$ donc f' est $\mathcal{C}^2$ puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence.

f est solution si et seulement si $f(0) = 2$, $f'(0) = 10$ et $f''(x) = 5f(x) - 5\sin(x)\displaystyle\int_0^x f \times \cos + 5\cos(x)\int_0^x f \times \sin$ donc si et seulement si $f(0) = 2$, $f'(0) = 10$, $f''(0) = 5f(0) = 10$ et $f'''(x) = 4f'(x)$. On a donc $f'(x) = 10\cos(2x) + 5\sin(2x)$ et $f(x) = 5\sin(2x) - \dfrac{5}{2}\cos(2x) + \dfrac{9}{2}$.

Exercice 27 *[sujet]* On a $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax} + \dfrac{1}{2}e^{ax}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\,\mathrm{d}t$. On a, pour $x \geqslant 0$, $\left|e^{ax}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty e^{ax}\left[\dfrac{e^{-at}}{-a}\right]_0^x \leqslant \dfrac{1}{a}\|f\|_\infty$ (de même pour $x < 0$ et l'autre terme) donc y est bornée si et seulement si $x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ donc si et seulement si $\alpha = \beta = 0$.

Exercice 28 *[sujet]* Les solutions de $y'' + y = g$ sont $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) - \cos(x)\displaystyle\int_0^x f \times \sin + \sin(x)\int_0^x f \times \cos$ donc $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \displaystyle\int_0^x (f(t) + f''(t))\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ et $f(x) + f(x+\pi) = -\displaystyle\int_x^{x+\pi}(f(t) + f''(t))\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \int_0^\pi (f(x-u) + f''(x-u))\sin(u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0$.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** On a $y'' = -|y| \leqslant 0$ donc y' décroît ; $y'(0) = 0$ donc $y' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $y(0) = a$ donc $y \leqslant a$ sur $\mathbb{R}^+$ (de même sur $\mathbb{R}^-$)

2. Si $a \leqslant 0$ alors $y \leqslant 0$ donc l'équation devient $y'' - y = 0$ et $y(x) = a\,\mathrm{ch}(x)$

3. Si $a > 0$ et si on suppose que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ alors $y > 0$ car $y(0) = a > 0$ donc $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ puis $y(x) = a\cos(x)$ qui s'annule donc c'est absurde. Donc y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$; on pose $\beta = \inf\{x \in \mathbb{R}^+, y(x) = 0\}$ (existence à vérifier), par continuité de y, on a $y(\beta) = 0$ et comme $y > 0$ sur $[0, \beta[$, on a nécessairement $y'(\beta) \leqslant 0$. y est donc solution de $y'' + |y| = 0$ avec $y(\beta) = 0$ et $y'(\beta) = b \leqslant 0$; le raisonnement de la question 1 prouve alors que $y \leqslant 0$ sur $[\beta, +\infty[$.

On résout alors sur les trois intervalles : sur $]\alpha, \beta[$, $y'' + y = 0$ donc $y(x) = a\cos(x)$ et $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ et $y'(\pi/2) = -a$; sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, $y'' - y = 0$ donc $y(x) = \gamma\,\mathrm{ch}(x) + \delta\,\mathrm{sh}(x)$ avec $y(\pi/2) = \gamma\,\mathrm{ch}(\pi/2) + \delta\,\mathrm{sh}(\pi/2) = 0$ et $y'(\pi/2) = \gamma\,\mathrm{sh}(\pi/2) + \delta\,\mathrm{ch}(\pi/2) = -a$.

Exercice 30 *[sujet]* **1.** On prouve qu'elles sont nécessairement de degré 2 puis de la forme αx^2.

2. z et y sont simultanément 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et z vérifie $x^4 z'' + 4x^3 z' = 0$ donc $z(x) = \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ et $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2$.

3. Les solutions sont prolongeables en 0 si et seulement si $\alpha = 0$ et dans ce cas solutions sur $\mathbb{R}$ (on retrouve les solutions polynômiales du début)

4. $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une solution particulière donc $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$

Exercice 31 *[sujet]* **1.** Elles sont de degré 1, on trouve αx

2. y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ si et seulement si z l'est et y est solution si et seulement si z vérifie $x(x^2 - 1)z'' + 2(2x^2 - 1)z' = 0$

3. $\dfrac{2 - 4x^2}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$ puis $z'(x) = \dfrac{\alpha}{x^2(x^2 - 1)}$ sur chacun des 4 intervalles de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ puis $z(x) = \alpha\left(\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right|\right) + \beta$ et $y(x) = \alpha\left(-1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) + \beta x$ sur $]-1, 0[$ ou $]0, 1[$. Recollement en 0 : on trouve $y(x) = \alpha\left(-1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) + \beta x$ sur $]-1, 1[$ avec $y(0) = -\alpha$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** X et X^2 sont solutions de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ donc (C-Lip) forment une base des solutions de $\mathcal{E}_0$ sur ces intervalles

2. $y(x) = ax + bx^2 + x^2\ln(x)$ sur chaque intervalle. Aucune solution sur $\mathbb{R}$ car y n'est jamais deux fois dérivable en 0.

Exercice 33 *[sujet]* z est solution sur $]-1, 1[$ de $(1 - x^2)z''(x) - xz'(x) = x$ donc $z'(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\left(-\dfrac{x}{2} + \alpha\arcsin(x) + \beta\right)$

Exercice 34 *[sujet]* $y(x) = (x + 2)z(x)$; z est solution de $x(x + 1)(x + 2)z''(x) + (2x(x + 1) + (x + 2)^2)z'(x)$ donc $z'(x) = \alpha\dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x)^2}$ et $y(x) = (x + 2)\left(\dfrac{-\alpha}{2(x^2 + 2x)} + \beta\right)$

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Pour $x > 0$, on a $f(x) \overset{u=x-t}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(2x\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - 2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u\right)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ car f et $id \times f$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence

2. On trouve $x^2 f''(x) + 4xf'(x) = 0$

3. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on doit avoir $\alpha = 0$; réciproquement les fonctions constantes sont solutions

Exercice 36 *[sujet]* On pose $y(t) = z(\ln t)$ et y est sol de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z''(x) - z'(x) + z(x) = 0$ donc $y(t) = \sqrt{t}\left(a\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(t) + b\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$

Si f est solution alors f' est dérivable puis f est solution si et seulement si $f''(t) + \dfrac{1}{t^2}f(t) = 0$ avec $f'(1) = f(1)$

Exercice 37 *[sujet]* On pose $y(x) = z(e^x)$; y est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z''(t) + 2z(t) + z(t) = e^{-t}$ donc $y(x) = \dfrac{\alpha + \beta\ln(x)}{x} + \dfrac{(\ln x)^2}{2x}$

Exercice 38 *[sujet]* **1.** $Y'' - Y = 0$ donc $y(x) = \alpha\,\mathrm{ch}(x^2) + \beta\,\mathrm{sh}(x^2)$

2. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, on pose $Z(x) = y(-x^2)$, $Z'' + Z = 0$ donc $y(x) = a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$

3. Recollement deux fois dérivable si et seulement si $\alpha = a$ et $\beta = b$.

Exercice 39 *[sujet]* $z(\theta) = y(\sin\theta)$; y est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-1, 1[$ si et seulement si z est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $4z''(\theta) + z(\theta) = 0$ donc $y(t) = \alpha\cos\frac{1}{2}\arcsin(t) + \beta\sin\frac{1}{2}\arcsin(t)$

Exercice 40 *[sujet]* **1.** $z(t) = y(\operatorname{sh} t)$; y est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z'' - 4z = 0$ donc $z(t) = \alpha\operatorname{ch}(2t) + \beta\operatorname{sh}(2t) = \alpha(1 + 2\operatorname{sh}^2 t) + 2\beta\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)$ donc $y(x) = \alpha(1 + 2x^2) + 2\beta x\sqrt{1 + x^2}$

2. $z(t) = y(\sin t)$; y est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-1, 1[$ si et seulement si z est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $z''(t) + 4z(t) = 2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$ donc $y(x) = \alpha\cos 2\arcsin(x) + \beta\sin 2\arcsin(x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(x)\sin 2\arcsin(x)$.

Exercice 41 *[sujet]* **1.** X est solution puis $y(x) = x\left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta\right)$

2. $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = \sum_{n\geqslant 0}(n^2 - 1)a_nx^n$ donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $(n^2 - 1)a_n = b_n$; il faut donc que $b_1 = 0$ et dans ce cas, on a une solution avec $R_a = R_b$.

Exercice 42 *[sujet]* $xy'''(x) + 2y'(x) + xy(x) = a_1 + \sum_{n\geqslant 1}[(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n$ donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}$, on trouve $R = +\infty$, $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ puis les solutions de $\mathcal{E}$ sont $y(x) = \alpha\frac{\sin x}{x} + \beta\frac{\cos x}{x}$ prolongeables en 0 et π deux fois dérivables si et seulement si $\beta = 0$.

Exercice 43 *[sujet]* $xy''(x) - y'(x) + 4x^3y(x) = -a_1 + 2a_3x^2 + \sum_{n\geqslant 3}[(n^2 - 1)a_{n+1} + 4a_{n-3}]x^n$ donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $a_1 = a_3 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{-4}{n^2 - 1}a_{n-3}$ pour $n \geqslant 3$. On en déduit l'existence de deux solutions DSE linéairement indépendantes : $y_1(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_nx^{4n}$ et $y_2(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_nx^{4n+2}$ avec $b_0 = 1$, $b_{4n+4} = \frac{-4}{(4n+3)^2 - 1}b_{4n}$ (donc $R_1 = +\infty$), $c_0 = 1$ et $c_{4n+2} = \frac{-4}{(4n+1)^2 - 1}c_{4n-2}$ (donc $R_2 = +\infty$).
Sur $\mathbb{R}^{+*}$, C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions est un plan, donc (y_1, y_2) en est une base. De même sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $y(x) = \begin{cases} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) & \text{si } x < 0 \\ y(0) & \text{si } x = 0 \\ \gamma y_1(x) + \delta y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Une telle solution est continue en 0 si et seulement si $\alpha = \gamma$, elle est alors $\mathcal{C}^1$ puis deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\beta = \delta$; les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc $\operatorname{Vect}\{y_1, y_2\}$ (donc toutes DSE).

Exercice 44 *[sujet]* **1.** $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = \sum_{n\geqslant 0}[2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n]x^n$ donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ donc $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$ et $R = +\infty$; on a donc $y(x) = a_0\begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

2. On pose $y(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})z(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; y est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $z''(x) + z'(x)\left(\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\operatorname{ch}(\sqrt{x})} + \frac{1}{2x}\right) = 0$ donc $z'(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}\operatorname{ch}(\sqrt{x})}$ et $z(x) = 2\alpha\operatorname{th}(\sqrt{x}) + \beta$. Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont $y(x) = a\operatorname{ch}(\sqrt{x}) + b\operatorname{sh}(\sqrt{x})$.
On vérifie que $x \mapsto \cos(\sqrt{-x})$ et $x \mapsto \sin(\sqrt{-x})$ sont deux solutions linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc une base des solutions puisque C-Lip s'applique sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 45 *[sujet]* Si $u(x) = 1 + x^2$ alors $(1 + x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = (uy)''(x)$ donc $(1 + x^2)y(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** Cours

2. a) $P = 1 + X^2$ convient

b) Si $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ avec $R > 0$ alors $(1 + x^2)y''(x) - 2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)[(n+2)a_{n+2} + (n-2)a_n]x^n$ donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n$. On a donc $a_4 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ pour $p \geqslant 2$

(c'est la solution polynômiale) et avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$ et $a_{2p} = 0$. On vérifie $R = 1$ et, pour $|x| < 1$, $y(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} x^{2p+1}\right) = \dfrac{1}{2}\Big[(1+x^2)\arctan(x) + x\Big]$

c) La fonction $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) + x$ n'est DSE que sur $]-1,1[$ mais est $\mathcal{C}^\infty$ et solution sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan ; $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x)+x$ sont libres donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $y : x \mapsto \alpha(1+x^2)+\beta((1+x^2)\arctan(x)+x)$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** C-Lip s'applique donc existence et unicité. On peut trouver y en remarquant que $y(x) = x$ est soliton de l'équation puis en posant $y(x) = xz(x)$ (mais il faut distinguer $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ avant de recoller). On cherche les solutions DSE : $2y''(x) - xy'(x) + y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)[2(n+2)a_{n+2} - a_n]x^n$ donc $a_{2p+1} = 0$ avec $a_1 = y'(0) = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4^p p!}$ avec $a_0 = y(0) = \sqrt{\pi}$. On a donc $R = +\infty$ et $y(x) = \sqrt{\pi}\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{4^n n!} = \sqrt{\pi}e^{x^2/4}$.

2. On applique le th de dérivation avec $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant t^2 e^{at-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a,a]$. On a $xf'(x) - 2f''(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t(x-2t)e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} f(x)$. On a aussi $f(0) = \sqrt{\pi}$ et $f'(0) = 0$ (intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire) donc $f(x) = \sqrt{\pi}e^{x^2/4}$

Exercice idiot car en fait $f'(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx} \times te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{x}{2}f(x)$ *donc ça ne sert à rien de passer par une eq diff d'ordre 2.*

Exercice 48 *[sujet]* **1.** $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R > 0$, y est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $(2n+1)a_n = 3b_{n-1}$ donc $R = +\infty$ et $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(6n+4)(2n)!}$ (une unique solution DSE y_0)

2. sur $\mathbb{R}^{+*}$: $y(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} + y_0$ et sur $\mathbb{R}$, $y(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} + y_0 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{-x}} + y_0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ une telle solution est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ donc y_0 est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 *[sujet]* **1.** non !

2. $g(x) = f(x) + \sin(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos - \cos(x)\int_0^x af\times\sin$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $g'(x) = f'(x) + \cos(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos + \sin(x)\int_0^x af\times\sin$; g' est $\mathcal{C}^1$ et $g''(x) = f''(x) + a(x)f(x) - \sin(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos + \cos(x)\int_0^x af\times\sin = f''(x) + (1+a(x))f(x) - g(x)$

3. $g(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ est bornée ($|g| \leqslant c$) puis $|f(x)| = \left|g(x) - \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |a(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$.

4. On a $h'(x) = \dfrac{|a(x)f(x)|}{c + \displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t} \leqslant |a(x)|$; en intégrant, on a $h(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x |a(t)|\,\mathrm{d}t + h(0) \leqslant h(0) + \int_0^{+\infty}|a(t)|\,\mathrm{d}t$ puis (avec **3**), $|f(x)| \leqslant c + \exp\left(h(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty}|a(t)|\,\mathrm{d}t\right)$

Exercice 50 *[sujet]* **1.** Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at + b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.

2. fg et g sont continues donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ et $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(t) = \dfrac{g(t)(f(t) - F(t))}{G(t)} \leqslant 0$. On a donc $\dfrac{F(t)}{G(t)} \leqslant \dfrac{F(0)}{G(0)} = M$ ce qui donne le résultat en réutilisant $f(t) \leqslant F(t)$.

3. a) On a $z(t) = -t\displaystyle\int_a^t y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^t uy(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ donc $z''(t) = -\varphi(t)y(t) = y''(t)$ et on a bien $z(t) = y(t) + \alpha t + \beta$

b) On a $\left|\dfrac{y(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{|\alpha t+\beta|}{t} + \displaystyle\int_a^t \left(1-\frac{u}{t}\right)|y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$. Puis $\dfrac{|\alpha t+\beta|}{t} \leqslant |\alpha| + \dfrac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a,+\infty[$ (car $a>0$) et $\displaystyle\int_a^t \left(1-\frac{u}{t}\right)|y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_a^t |y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u = \int_a^t \left|\frac{y(u)}{u}\right| \times u|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$. On peut donc appliquer **2**, ce qui donne $\left|\dfrac{y(t)}{t}\right| \leqslant M\exp\left(\displaystyle\int_a^t |u\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant M\exp\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} u|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right)$.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** C-Lip

2. $g(x) = f(x)\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}\right)$; il suffit de vérifier que $h(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2}$ est solution : $h'(x) = f'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} + \frac{1}{f(x)}$ puis $h''(x) = f''(x)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)^2} = (1+x^4)h(x)$

3. Si f s'annule sur $\mathbb{R}^+$, par continuité de f, on a $f(\alpha)=0$ et $f>0$ sur $[0,\alpha[$; on en déduit $f''\geqslant 0$ sur $[0,\alpha[$ donc $f'\geqslant 1>0$ donc $f\geqslant f(0)=1$ ce qui est absurde. Ainsi $f>0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $f''\geqslant 0$ puis $f'\geqslant f'(0)=1$ donc $f(x)\geqslant x+f(0)=x+1$ donc $0\leqslant \dfrac{1}{f(x)^2}\leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 52 *[sujet]* Existence de α et β faite en cours.
Si $z=y_2/y_1$ alors $z'=\dfrac{w}{y_1^2}$ avec $w=y_1'y_2-y_1y_2'$ puis $w'=(a_2-a_1)y_1y_2$. Si on suppose $y_2>0$ sur $]\alpha,\beta[$ (donc $\geqslant 0$ sur $[\alpha,\beta]$), on a $w'>0$ sur $]\alpha,\beta[$ donc $w(\alpha)<w(\beta)$, ce qui est absurde car $w(\alpha)=y_1'(\alpha)y_2(\alpha)\geqslant 0$ et $w(\beta)=y_1'(\beta)y_2(\beta)\leqslant 0$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Si $f'(x_0)=0$ alors f est solution de $(\mathcal{E})$ avec $y(x_0)=y'(x_0)=0$, problème dont la fonction nulle est aussi solution ; d'après C-Lip, on en déduirait $f=0$. f est alors strictement croissante au voisinage de x_0.

2. On pose $x_1=\inf\{x>x_0, f(x)=0\}$ (existe : partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par x_0), par continuité de f, on vérifie $f(x_1)=0$ et avec **1**, $x_1\geqslant x_0+\alpha>x_0$.

3. Si $f>0$ sur $]x_0,x_1[$ alors $f'(x_1)<0$ mais $f''=-pf\geqslant 0$ donc f' croît, ce qui est absurde.

Exercice 54 *[sujet]* Si f s'annulait au moins deux fois, on trouve (cf cours) $\alpha<\beta$ tels que $f(\alpha)=f(\beta)=0$ et $f>0$ sur $]\alpha,\beta[$ (ou <0) ; on a alors $f''=-qf\geqslant 0$ donc f' croît de $f'(\alpha)\geqslant 0$ (car si $f'(\alpha)<0$, avec $f(\alpha)=0$, on aurait $f<0$ à droite de α) à $f(\beta)\leqslant 0$ (même raisonnement) donc $f'=0$ sur $[\alpha,\beta]$. On aurait donc f solution de $y''+qy=0$ avec $y(\alpha)=y'(\alpha)=0$ donc $y=0$ avec C-Lip, ce qui est absurde

Exercice 55 *[sujet]* **1.** Si y est bornée, $|y''(x)|\leqslant \|y\|_\infty \dfrac{x}{1+x^3}$ donc y'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, puis $y'(x)=y'(0)+\displaystyle\int_0^x y''(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} l = y'(0)+\int_0^{+\infty} y''(t)\,\mathrm{d}t$. Si $l\neq 0$, par le TAF, on prouve que y n'est pas bornée (si $l>0$, on a $y'\geqslant \dfrac{1}{2}l$ pour $t\geqslant t_0$) donc $l=0$.

2. Soit (f,g) une base de solutions de $(\mathcal{E})$ (par C-Lip), on vérifie $w'=0$ donc $w=\alpha$. Si on suppose que f et g sont bornées alors f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$ par **1** et on en déduit $w=f'g-fg' \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\alpha=0$ et $w=0$, ce qui est incompatible avec le fait que (f,g) soit libre.

Exercice 56 *[sujet]* **1.** Comme $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto e^{-x}$ sont solutions de $(\mathcal{E}_0)$, on cherche y_p sous la forme $y_p(x)=\alpha(x)e^x+\beta(x)e^{-x}$ avec $\alpha'(x)e^x+\beta'(x)e^{-x}=0$; on trouve $\alpha'(x)=f(x)e^x$ et $\beta'(x)=-f(x)e^{-x}$. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc $y(x)=ae^x+be^{-x}+e^x\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t$. On en déduit $\beta=f(0)$ et $\alpha=e^{-1}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sh}(1-t)\,\mathrm{d}t$. α et β sont bien uniques.

2. On a $|\alpha e^x|\leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{sh}(1-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{sh}(1)\|f\|_\infty$ puis $|\beta e^{-x}|\leqslant |f(0)|\leqslant \|f\|_\infty$ et $\left|e^x\displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t - e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant e\|f\|_\infty+\|f\|_\infty$ donc $\|\phi(f)\|_\infty \leqslant (\mathrm{sh}(1)+1+e+1)\|f\|_\infty$ donc ϕ est continue pour $\|\ \|_\infty$.