L'usage des calculatrices est interdit

Problème : Diverses propriétés des endomorphismes autoadjoints positifs

(Extrait de CCP PSI 2011 maths 2)

Notations.

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A=(a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
On note A^T la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.
Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $(x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x.
Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit X^TY appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y)=X^TY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note S_n^+ (resp. S_n^{++}) l'ensemble des matrices $S \in S_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : pour tout X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^TSX \geqslant 0 \text{ (resp. } X^TSX > 0)$$

Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit s l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ et soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et X relativement à $\mathcal{B}$. On a donc $X^TSX=(x|s(x))$.

Partie I - Racine carrée d'une matrice de S_n^+.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les n valeurs propres de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ SX_i=\lambda_i X_i$.

1. Question de cours : montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_i \geqslant 0$.

2. On suppose que $S \in S_n^{++}$. Montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}$.

3. On suppose que $S \in S_n^+$.

a) Soient $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et $\Delta=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$. Calculer Δ^2.
On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2=D$. On note $(C_1,\ldots,C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $NY=\mu Y$.
Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \mu^2 y_i=\lambda_i y_i$ puis $\mu y_i=\sqrt{\lambda_i}\, y_i$.
En déduire $N=\Delta$.

b) Soit $U \in O(n)$ telle que $S=UDU^T$.
Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2=S$.

c) Déduire de **I.3.a** que T est unique.

On notera $T=\sqrt{S}$ l'unique matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2=S$.

4. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1,\ldots,\mu_p$ par :

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \forall a \in \mathbb{R},\ L_k(a)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{a-\mu_j}{\mu_k-\mu_j}$$

a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k=\lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$
(on rappelle que les X_i, définis au début de cette partie, appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ SX_i=\lambda_i X_i$).

b) Soit P le polynôme de degré $\leq p-1$, à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$.
Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k.
Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$.
Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

c) En appliquant les questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$.
Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison des matrices S et $I_3 = \operatorname{diag}(1,1,1)$.

Partie II - Une propriété de la trace des matrices de S_n^+.

1. Soit $S \in S_n^+$.

a) On considère la matrice $\delta = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \alpha_i \geqslant 0$. Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$.
Montrer que $\operatorname{tr}(\delta V) \leqslant \operatorname{tr}(\delta)$.

b) En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a $\operatorname{tr}(SU) \leqslant \operatorname{tr}(S)$.

2. Réciproque de la propriété **II.1**.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in O(n),\ \operatorname{tr}(AU) \leqslant \operatorname{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

a) Un lemme technique. Soient a, b, θ des réels.
Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ tel que $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$.
En déduire que l'inégalité « $\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leqslant a$ » entraîne $b = 0$.

b) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π, orienté par la base (e_p, e_q), la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π.
Écrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
Calculer $\operatorname{tr}(AU)$.
En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

c) On note ℓ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres de ℓ. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on notera $\ell(v_i) = \beta_i v_i$.
On suppose qu'une valeur propre de ℓ est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$. En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\operatorname{tr}(AU) \leqslant \operatorname{tr}(A)$ est absurde et en déduire que $A \in S_n^+$.

Partie III - Des inégalités remarquables.

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et t. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de s.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer
$$\|x\|^4 = (t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \tag{1}$$
À quelle condition sur x a-t-on égalité dans l'inégalité de droite ?

2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1\lambda_n$$
Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.
Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v. En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ Q(a) = (s(x)|x)a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n$$
Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité
$$(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4 \tag{2}$$

4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$.
Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $(s^{-1}(x)|x)$.
Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans (2).