Correction du DS7

(Extrait de CCP PSI 2011 maths 2)

Partie I :

1. Cours !

2. On a $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ donc $\boxed{S \text{ est inversible}}$ De plus, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^T$; donc $S^{-1} = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\right) P^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(S^{-1}) = \left\{\lambda_i^{-1}, i \in [\![1, n]\!]\right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

3. a) $\boxed{\Delta^2 = D}$

Si $NY = \mu Y$ alors $DY = N^2Y = \mu NY = \mu^2 Y$; en identifiant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, on a $\mu^2 y_i = \lambda_i y_i$. On en déduit $\left(\mu + \sqrt{\lambda_i}\right)\left(\mu - \sqrt{\lambda_i}\right) y_i = 0$. Comme $\mu + \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$, on distingue deux cas : soit $\mu = \lambda_i = 0$ et on a bien $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$; soit $\mu + \sqrt{\lambda_i} > 0$ et on obtient $\left(\mu - \sqrt{\lambda_i}\right) y_i = 0$. Dans les deux cas, on a $NY = \Delta Y$. Si on introduit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base de vecteurs propres de N, alors on a $NY_k = \Delta Y_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ d'après ce qui précède. Comme N et Δ coïncident sur une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\boxed{N = \Delta}$

b) La matrice $\boxed{T = U\Delta U^T}$ convient.

c) Si T' est une autre solution, on pose $N = U^T T' U$, on a alors $N^2 = D$ donc (**I.3.a**) $N = \Delta$ puis $T' = T\Delta U^T = T$. On en déduit que $\boxed{T^2 = S \text{ si et seulement si } T = U\Delta U^T}$

4. a) On a $L_k(S)X_i = L_k(\lambda_i)X_i$ car $SX_i = \lambda_i X_i$. On en déduit $\boxed{L_k(S)X_i = \begin{cases} X_i & \text{si } \lambda_i = \mu_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

b) On a $\boxed{P = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k}$ puis $P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\mu_{k_0}} L_{k_0}(S)X_i$ avec k_0 tel que $\lambda_i = \mu_{k_0}$. On a donc $P(S)(X_i) = \sqrt{\lambda_i} X_i$. Comme S est symétrique, $P(S)$ est symétrique. De plus $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de $P(S)$ associée aux valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ donc $P(S) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin $P(S)$ et $\sqrt{S}$ coïncident sur cette base donc $\boxed{\sqrt{S} = P(S)}$

c) $\mathrm{rg}(S - 3I_3) = 1$ donc $\mathcal{X}_S = (3 - X)^2(9 - X)$; les deux polynômes de Lagrange sont $L_3 = -\dfrac{X - 9}{6}$ et $L_9 = \dfrac{X - 3}{6}$ donc $\sqrt{S} = \sqrt{3}L_3(S) + 3L_9(S) = -\dfrac{S - 9I_3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{S - 3I_3}{2}$ donc $\boxed{\sqrt{S} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} S + \dfrac{3(\sqrt{3} - 1)}{2} I_3}$

Partie II

1. a) On a $\mathrm{Tr}(\delta V) - \mathrm{Tr}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{i,i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (v_{i,i} - 1)\alpha_i$. Or, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}^2 = 1$ (les vecteurs colonnes de V sont unitaires) donc $|v_{i,i}| \leqslant 1$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(\delta V) \leqslant \mathrm{Tr}(\delta)}$ car $\alpha_i \geqslant 0$.

b) Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. Par propriété de la trace, on a $\mathrm{Tr}(SU) = \mathrm{Tr}\left(P(DP^TU)\right) = \mathrm{Tr}\left((DP^TU)P\right) \leqslant \mathrm{Tr}(D)$ car $P^TUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(S)$, on a bien $\boxed{\mathrm{Tr}(SU) \leqslant \mathrm{Tr}(S) \text{ si } U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

2. a) On cherche φ tel que $\sqrt{a^2 + b^2} \cos\varphi = b$ et $\sqrt{a^2 + b^2} \sin\varphi = a$: si $a = b = 0$, on prend $\varphi = 0$ par exemple ; si $a \geqslant 0$ et $b \neq 0$, on prend $\varphi = \arccos \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et si $a < 0$ on prend $\varphi = -\arccos \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, a\cos\theta + b\sin\theta \leqslant a$ alors on a $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant a$ (avec $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$) donc $b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - a^2 \leqslant 0$ et $\boxed{b = 0}$

b) On a $U = I_n - (E_{p,p} - E_{q,q}) + \cos\theta E_{p,p} + \sin\theta E_{q,p} - \sin\theta E_{q,p} + \cos\theta E_{q,q}$ où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{Tr}(AU) = \mathrm{Tr}(A) + (\cos\theta - 1)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p})$. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour toute valeur de θ, on en déduit $\cos\theta(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p}) \leqslant (a_{p,p} + a_{q,q})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc $a_{p,q} = a_{q,p}$. Ceci étant vrai pour tout couple $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $\boxed{A \text{ est symétrique}}$

c) On a $\mathrm{Tr}(AU) = \mathrm{Tr}(DU')$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$ où $D = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $U' = -E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{V}$. Comme $\mathrm{Tr}(DU') = \mathrm{Tr}(D) - 2\beta_1 > \mathrm{Tr}(D)$, on aboutit à une absurdité. Ainsi on a $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

Partie III

1. Les endomorphismes t et t^{-1} sont autoadjoints (car $\mathcal{B}$ est orthonormale) donc

$$(t(x)|t^{-1}(x)) = (x|t \circ t^{-1}(x)) = (x|x) = \|x\|^2$$

et $\|t(x)\|^2 = (t(x)|t(x)) = (t^2(x)|x) = (s(x)|x)$; et de même, on a $\|t^{-1}(x)\|^2 = (s^{-1}(x)|x)$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant \|t(x)\|^2 \times \|t^{-1}(x)\|^2$ et on obtient

$$\boxed{\|x\|^4 = (t(x)|t^{-1}(x)) \leqslant (s(x)|x) \times (s^{-1}(x)|x)}$$

On a égalité si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc si et seulement si les vecteurs $t(x)$ et $t^{-1}(x)$ sont liés, ie si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$ (car si $t(x) = 0$ alors $x = 0$ et $t^{-1}(x) = 0$ aussi) ; de plus $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$ si et seulement si $s(x) = \lambda x$ donc l'égalité a lieu si et seulement si x est un vecteur propre de s (ou si $x = 0$).

2. On a $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_n)$ donc $\boxed{P(\lambda_i) \leqslant 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]}$

On a $s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i} x$ donc $v(x) = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} x$ et x est un vecteur propre de v pour la valeur propre $\mu_i = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} \geqslant 0$.
On en déduit que si $\mathcal{C}$ est une base orthonormale de vecteurs propres de s, donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\mathcal{C}$ est aussi une base orthonormale de vecteurs propres de v et $D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est diagonale. Comme $\mathcal{C}$ est orthonormale, $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ est orthogonale et $V = PDP^T$ est donc symétrique. Les valeurs propres de V sont les μ_i donc positives et $\boxed{V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

3. On a $Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n > 0$ car $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et
$Q(1) = (s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + s^{-1}(x)|x) = (P(s) \circ s^{-1}(x)|x) = -(v(x)|x) \leqslant 0$.
On en déduit que le polynôme Q de degré 2 (car $(s(x)|x) \neq 0$) s'annule sur $[0, 1]$, car il est continu ; donc P possède au moins une racine réelle et son discriminant est donc positif ou nul : $\Delta = (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|x\|^4 - 4\lambda_1\lambda_n(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \geqslant 0$ ce qui donne $\boxed{(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x)) \leqslant \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4}$

4. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_n$, les vecteurs v_1 et v_2 sont orthogonaux donc $(s(x)|x) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n | v_1 + v_n) = \lambda_1\|v_1\|^2 + \lambda_n\|v_n\|^2$ $(s(x)|x) = \lambda_1 + \lambda_n$ et de même $(s^{-1}(x)|x) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_n}$. On a alors $(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. D'autre part, on a $\|x\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = 2$ (Pythagore) donc $\|x\|^4 = 4$ et $\boxed{x \text{ vérifie bien l'égalité dans (2)}}$