TD24 : Équations différentielles

Exercice 1 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$

1. Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide d'une intégrale
3. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2023)**
On définit $(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$. *(*)*
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x vérifiant (E). Montrer que l'application qui à t associe $\dfrac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$ est bornée et atteint sa borne supérieure. Atteint-elle sa borne inférieure ?

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exercice 4 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0).
2. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2 z(x)$.
3. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+}$.
4. Résoudre $x^2y'' - 2y = x^3$

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Rappeler le DSE de arctan
2. Soit $(E) : (1+x^2)y'' - 2y = 0$
   a) Trouver une solution polynômiale de (E).
   b) Trouver une solution DSE (non polynômiale) de (E).
   c) Résoudre (E)

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2015)**
Résoudre sur $]-1,1[$, $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en posant $t = \sin\theta$.

Exercice 7 **(Centrale PSI 2015)**

1. Soit a continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. À-t-on $\lim\limits_{+\infty} a = 0$?
2. On pose $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est solution de $(E) : y''(x) + (1+a(x))y(x) = 0$. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g'' + g = 0$. *(*)*
3. En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que $|f(x)| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. *(*)*

Indications

Exercice 2

2. *Justifier qu'il existe* φ *tel que* $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$

Exercice 7

2. *Commencer par la classe* $\mathcal{C}^1$ *en développant* $\sin(x-t)$ *puis calculer* $g'(x)$.
4. *Étudier* $h(x) = \ln\left(c + \displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$.