Correction TD23 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 8 **(Centrale PSI 2023)**
Soient $D = (\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

1. Montrer que f est continue sur D. (*)
2. Montrer que f est majorée sur D. (*)
3. Soit $K = [0,10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D. (*)
4. Déterminer $\max\limits_D(f)$.

---

1. Sur D, le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$ donc, par quotient de polynômes, f est continue sur $D \setminus \{(0,0)\}$
Si $x \geqslant y$ alors $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \leqslant \dfrac{xy}{x+y} \leqslant \dfrac{xy}{2y} = \dfrac{x}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on fait de même lorsque $y \geqslant x$. Ainsi, f est aussi continue en $(0,0)$.
2. D n'est pas borné donc le TBA ne s'applique pas, il faut donc le faire par calcul : si $x \geqslant y$, on a $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{xy}{(1+x)(x+y)} \leqslant \dfrac{xy}{(1+x)(y+y)} = \dfrac{x}{2(1+x)} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et on fait de même lorsque $x \leqslant y$. On a donc $\boxed{0 \leqslant f \leqslant \dfrac{1}{2}}$
3. K est fermé borné et non vide, f est continue sur K et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie donc le TBA assure que f admet un maximum sur K.
L'idée est ensuite de prouver que le maximum sur K est le même que celui sur D car f prend hors de D des valeurs inférieurs au maximum sur K : on pose $M = \max\limits_K f$; comme $(1,1) \in K$, on a $M \geqslant f(1,1) = \dfrac{1}{8}$. Si $(x,y) \notin K$ alors $x \geqslant 10$ ou $y \geqslant 10$; on suppose par exemple que $x \geqslant 10$. On a alors $f(x,y) \leqslant \dfrac{x}{(1+x)(x+y)} \leqslant \dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{10}$.
On a donc pour tout point de $D \setminus K$, $f(x,y) \leqslant \dfrac{1}{10} \leqslant f(1,1) \leqslant M$; on peut donc conclure que f admet sur D un maximum, qui est le même que celui sur K (et que ce maximum n'est pas atteint hors de K)
4. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{D} = \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ qui est ouvert, le maximum M précédent n'est pas atteint sur le bord de D (car $f(x,y) = 0$ si $x = 0$ ou $y = 0$ et $M > 0$), donc M est atteint en un point critique de f. On vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(y-x^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$ donc (x,y) est un point critique si et seulement si $y = x^2$ et $x = y^2$ (car $x > 0$ et $y > 0$ dans $\overset{o}{D}$) ; le seul point critique est donc le point $(1,1)$. Ce point est donc nécessairement le point où f atteint sont maximum et $\boxed{M = f(1,1) = \dfrac{1}{8}}$