Correction TD24 : Équations différentielles

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)
On définit $(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$. *(*)*
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x vérifiant (E). Montrer que l'application qui à t associe $\dfrac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$ est bornée et atteint sa borne supérieure. Atteint-elle sa borne inférieure ?

---

1. C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $5X^2 + 10X + 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont $X = -1 \pm i\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ donc les solutions réelles de l'équation différentielle sont définies par $x : t \longmapsto e^{-t}\left[a\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right) + b\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right)\right]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $t_n = 2n\pi\sqrt{5}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ alors $x(t_n) = ae^{-t_n}$ donc si $a \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |x(t_n)| = 0$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} |x(t_n)| = +\infty$ donc, comme $|x|$ est continue, par le TVI, il existe un point $t \in \mathbb{R}$ pour lequel $|x(t)| = 1$. Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ et il suffit de faire de même avec $t_n = \sqrt{5}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$.
3. ϕ est paire et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(t) = \dfrac{2t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}$ donc ϕ est croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$ (et paire) donc $\phi(\mathbb{R}) = [0,1]$, la valeur 1 étant atteinte en $t = \pm 1$ et la valeur 0 en $t = 0$.
4. On a $\phi(x(t)) \leqslant 1$ et $\phi(x(t)) = 1$ lorsque x prend la valeur ± 1 donc en tout point pour lequel $|x(t)| = 1$; un tel point existe d'après **2**. Ainsi $\boxed{\max(\phi \circ x) = 1}$
   On a aussi $\phi(x(t)) \geqslant 0$ donc on aura $\min(\phi \circ x) = 0$ s'il existe un point $t \in \mathbb{R}$ pour lequel $x(t) = 0$. On cherche donc un point pour lequel $[a\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right) + b\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right) = 0$: en écrivant $[a\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right) + b\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}}\right) = 0 = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{5}} + \varphi\right)$ (cf DS7), et en prenant $t = \sqrt{5}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$, on obtient bien un point pour lequel $x(t) = 0$ donc $\boxed{\min(\phi \circ x) = 0}$

Exercice 4 (CCINP PSI 2022)
Soit $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E_0).
2. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2z(x)$.
3. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^+$.
4. Résoudre $x^2y'' - 2y = x^3$

---

1. Comme vu en TD, les solutions polynômiales sont de la forme $y(x) = \alpha x^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
2. On pose, sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$), $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^2}$; ainsi, si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors z aussi. Réciproquement, $y(x) = x^2z(x)$ donc si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors y aussi.
   On a ensuite $y''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)$ donc $x^2y''(x) - 2y(x) = x^4z''(x) + 4x^3z'(x)$. Ainsi y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$) si et seulement si z est solution de $xz'(x) + 4z'(x) = 0$ (équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par z'). On en déduit $z'(x) = \alpha e^{-4\ln|x|} = \dfrac{\alpha}{x^4}$ puis $z(x) = \dfrac{-\alpha}{3x^3} + \beta$ donc $y(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
3. La limite de y en 0^+ n'est finie que si $b = 0$. Il reste alors $y(x) = ax^2$ qui est bien une solution sur $\mathbb{R}^+$ (car dérivable en 0) et même sur $\mathbb{R}$ entier d'après la première question.
4. On vérifie que $x \mapsto x^3$ est une solution « évidente » de (E) donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ de (E) sont $y(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x} + x^3$. Sur $\mathbb{R}$, on a $y(x) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{b}{x} + x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ cx^2 + \dfrac{d}{x} + x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Une telle fonction n'est continue en 0 que

si $b = d = 0$; dans ce cas $y'(x) = \begin{cases} 2ax + 3x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2cx + 3x^2 \text{si } x < 0 \end{cases}$ qui donne $\lim\limits_{0^+} y' = 0 = \lim\limits_{0^-}$ donc y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $y'(0) = 0$. Reste la dérivabilité seconde de y en 0 : $\dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = \begin{cases} 2a + 3x & \text{si } x > 0 \\ 2c + 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc y est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $a = c$. Au final les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$y(x) = ax^2 + x^3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Rappeler le DSE de arctan

2. Soit $(E) : (1 + x^2)y'' - 2y = 0$

a) Trouver une solution polynômiale de (E).

b) Trouver une solution DSE (non polynômiale) de (E).

c) Résoudre (E)

---

1. Pour $|x| < 1$, on a $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

2. a) On vérifie que $x \mapsto 1 + x^2$ est une solution ; on pourrait par ailleurs prouver que les solutions polynômiales non nulles de (E) sont nécessairement de degré 2 puis qu'elles sont de la forme $y(x) = a(1 + x^2)$

b) Si $y(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ avec $R > 0$ alors

$$\begin{aligned}
(1 + x^2)y''(x) - 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\overset{p=n-2}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1)a_{p+2} x^p + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^2 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)[(n+2)a_{n+2} + (n-2)a_n] x^n
\end{aligned}$$

donc y est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\dfrac{n-2}{n+2} a_n$. On a donc $a_4 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ pour $p \geqslant 2$ (et $a_2 = a_0$ donc $x \mapsto a_0 + a_2 x^2 = a_0(1 + x^2)$ redonne les solutions polynômiales) et avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$ et $a_{2p} = 0$. On vérifie $R = 1$ et, pour $|x| < 1$, avec $a_{2p+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^p}{2p+1} - \dfrac{(-1)^p}{2p-1}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} x^{2p+1}\right) = \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} x^{2p+1} - x\right) \\
&\overset{p=n+1}{=} \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+3} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{1 + x^2}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

c) La fonction $x \mapsto (1 + x^2)\arctan(x) + x$ n'est DSE que sur $]-1, 1[$ mais est $\mathcal{C}^\infty$ et solution sur $\mathbb{R}$ (vérification facile en dérivant deux fois). Comme $x \mapsto \dfrac{2}{1 + x^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de C-Lip s'applique donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan ; $x \mapsto 1 + x^2$ et $x \mapsto (1 + x^2)\arctan(x) + x$ sont libres donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $y : x \mapsto \alpha(1 + x^2) + \beta((1 + x^2)\arctan(x) + x)$

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2015)**

Résoudre sur $]-1, 1[$, $4(1 - t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en posant $t = \sin\theta$.

Le changement de variable est défini par $\left.\begin{array}{c} t=\sin\theta \\ \theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\theta=\arcsin(t)\\ t\in]-1,1[\end{array}\right.$ Si on pose $z(\theta)=y(\sin\theta)$ et si y est deux fois dérivable sur $]-1,1|$ alors z est deux fois dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; réciproquement, $y(t)=z(\arcsin(t))$ donc si z est deux fois dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors y est deux fois dérivable sur $]-1,1[$.

On pose $y(t)=z(\arcsin t)$, on a alors $y'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}z'(\arcsin t)$ et $y''(t)=\dfrac{t}{(1-t^2)^{3/2}}z'(\arcsin t)+\dfrac{1}{1-t^2}z''(\arcsin t)$ donc $4(1-t^2)y''(t)-4ty'(t)+y(t)=4z''(\arcsin t)+z(\arcsin t)$. On en déduit que y est sol de $\mathcal{E}$ sur $]-1,1[$ si et seulement si z est solution sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $4z''(\theta)+z(\theta)=0$ donc $z(\theta)=a\cos\dfrac{\theta}{2}+b\sin\dfrac{\theta}{2}$ et $\boxed{y(t)=a\cos\dfrac{\arcsin t}{2}+b\sin\dfrac{\arcsin t}{2}}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Centrale PSI 2015)

1. Soit a continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. À-t-on $\lim\limits_{+\infty} a=0$?

2. On pose $g(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est solution de (E) : $y''(x)+(1+a(x))y(x)=0$. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $g''+g=0$. *(*)*

3. En déduire qu'il existe $c>0$ telle que $|f(x)|\leqslant c+\displaystyle\int_0^x |a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. *(*)*

---

1. Bien sûr que non : cf Rq III.7 du cours sur l'intégration (dents de scie)

2. On a $g(x)=f(x)+\sin(x)\displaystyle\int_0^x a(t)f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t-\cos(x)\int_0^x a(t)f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $af\sin$ et $af\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$, les fonctions $C:x\longmapsto\displaystyle\int_0^x a(t)f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $S:x\longmapsto\displaystyle\int_0^x a(t)f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, par produit, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. On a alors

$$\begin{aligned} g'(x)&=f'(x)+\cos(x)C(x)+a(x)f(x)\sin(x)\cos(x)+\sin(x)S(x)-a(x)f(x)\sin(x)\cos(x)\\ &=f'(x)+\cos(x)C(x)+\sin(x)S(x)\end{aligned}$$

On en déduit que g' est elle aussi $\mathcal{C}^1$ donc $\boxed{g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)}$ et

$$\begin{aligned} g''(x)&=f''(x)-\sin(x)C(x)+a(x)f(x)\cos^2(x)+\cos(x)S(x)+a(x)f(x)\sin^2(x)\\ &=f''(x)+a(x)f(x)-\sin(x)C(x)+\cos(x)S(x)\overset{f\text{ sol de }(E)}{=}-f(x)-\sin(x)C(x)+\cos(x)S(x)\\ g''(x)&=-g(x)\end{aligned}$$

3. On en déduit $g(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ donc g est bornée ($|g|\leqslant c$ avec $c=|\alpha|+|\beta|$ par exemple). On a ensuite

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|g(x)-\int_0^x\sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|g(x)|+\left|\int_0^x\sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant c+\int_0^x|\sin(x-t)a(t)f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant c+\int_0^x|a(t)f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

4. On étudie $h:x\longmapsto\ln\left(c+\displaystyle\int_0^x|a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$: comme a et f sont continues sur $\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\displaystyle\int_0^x|a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et positive, comme $c>0$, par composition, h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. On a alors $h'(x)=\dfrac{|a(x)f(x)|}{c+\displaystyle\int_0^x|a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t}$ donc $h'(x)\leqslant|a(x)|$ d'après la question précédente. En intégrant, on obtient $h(x)-h(0)\leqslant\displaystyle\int_0^x|a(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}|a(t)|\,\mathrm{d}t$ car a est intégrable et $|a|\geqslant0$. La fonction h est donc majorée : $h\leqslant K$. Par composition par exp qui est croissante, on en déduit $c+\displaystyle\int_0^x|a(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant e^K$ et donc, avec **3.**, $|f(x)|\leqslant e^K$ et $\boxed{f\text{ est bornée}}$