Oral TD1 : révisions de première année

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2023)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soit $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

2. Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. On pose $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant :

$$u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp\left(-\frac{u_n}{n}\right)$$

1. Étudier la suite (u_n)

2. Étudier les séries $\sum(u_n - 1)$ puis $\sum(-1)^n(u_n - 1)$ *(*)*

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2023)**

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $1 + \ln(x+n) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$; on note u_n cette solution.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) < u_n < n$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 5 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2024)**

Soit $n > 1$ entier. On considère le polynôme P tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$.

1. Déterminer les racines de P.

2. Montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right| = n$.

3. En déduire que $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue bornée, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2}\, \mathrm{d}t. \ (*)$$

Indications

Exercice 3

3. *Plutôt un DL de u_n que le CSSA*

Exercice 6

a) *Montrer que f est nécessairement dérivable.*

b) *Si $G : x \mapsto 2x + \frac{1}{3}x^3$, calculer $G(f(x))$ puis vérifier que G est bijective et déterminer f à l'aide de G^{-1} (sans chercher G^{-1}).*

c) *Montrer que f est bien bornée.*