Exercices d'oraux 2024

Mines-Ponts

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E

b) Trouver les valeurs propres de T

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{T^{k+1}(f)}{k!}$ converge simplement vers S à déterminer.

d) ?

2. Soient $\alpha > 0$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha + t^4}$

a) Montrer que I est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) Trouver les limites et des équivalents de I en 0 et $+\infty$.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

a) Déterminer la valeur de F_n en fonction de n

b) Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$

c) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

2. Soient $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $f, g \in E$, $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]\,\mathrm{d}t$

a) Justifier que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E

b) Soient $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $P = X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 8X + 1$

a) Montrer que si z est racine de P alors $\dfrac{1}{z}$ est aussi racine de P

b) Montrer que P possède une racine réelle $\alpha > 1$

c) On note β une racine complexe de P distincte de α et $\dfrac{1}{\alpha}$ et on pose $t = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ et $s = \beta + \dfrac{1}{\beta}$.
Montrer que $s + t = 8$ et $st = 10$.

d) En déduire $t > 2$ et que s est un réel tel que $0 < s < 2$

e) Montrer que β n'est pas réel et que β est de module 1

2. Le nombre N d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson de paramètre a. À sa naissance, chaque enfant à une probabilité $p \in]0,1[$ de survivre, indépendamment des autres. On note M le nombre d'enfants qui ont survécu

a) Déterminer la loi conjointe (N, M) puis la loi et l'espérance de M

b) M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et H un sous espace vectoriel de E. Montrer que H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle ℓ telle que $H = \ker(\ell)$

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$. Montrer que $\phi : A \longmapsto \phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$

c) On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. C est-elle inversible ?
Calculer $\mathrm{Tr}(J_r C)$

d) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible

2. Soit E l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, 1-lipschitziennes et telles que $u(0)=0$.
Déterminer $\sup\limits_{u\in E}\displaystyle\int_0^1 \left((u(t)-u(t)^2\right)\mathrm{d}t$

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ tel que $(X^i|X^j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

b) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire précédent et on considère $F=\{P\in\mathbb{R}[X], P(1)=P(2)\}$. Déterminer $F^\perp$ et $F+F^\perp$

c) Déterminer $d(X,F)$

2. Déterminer la distance moyenne entre deux points d'un cercle. On pourra introduire une variable aléatoire uniforme de paramètre N, que l'on fera ensuite tendre vers $+\infty$

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Calculer M^n pour $n\geqslant 1$

b) Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\{M^n, n\in\mathbb{N}\}$

c) En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec M ; on pourra commencer par chercher les matrices qui commutent avec les vecteurs de la base précédente.

2. a) Montrer, pour $x\in[0,1]$, que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{2}\arctan x+\frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)-\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $X\in\mathbb{R}^n$ non nul. Pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M)=(MX|X)$.

a) Déterminer $\phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

b) Déterminer $\phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

2. Soit f une permutation de $\mathbb{N}$. Étudier la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{f(k)}{k^2}$

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente et telle que $AA^T=A^TA$. On pose $B=A^TA$

a) Montrer que B est diagonalisable.

b) Déterminer B puis A.

2. Pour $n\geqslant 1$ et $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=x^n-\cos(x)$.

a) Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $[0,1]$ en un réel que l'on notera a_n.

b) Étudier la nature de la suite (a_n). Si elle converge, déterminer sa limite.

c) Déterminer un équivalent de a_n-1 en $+\infty$.

Centrale

Exercice 9 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

Soient $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et W_h l'ensemble des fonctions f de E, bornées, telles que $\forall x\in\mathbb{R}, \displaystyle\int_{x+h}^{x+2h}f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que W_h est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. a) Soit $f_n: t\longmapsto\cos\left(\dfrac{2n\pi}{h}t\right)$; montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre d'éléments de W_h.
Que peut-on en déduire sur la dimension de W_h ?

b) Soit T_h définie par $\forall x\in\mathbb{R}, T_h(f): x\mapsto f(x+h)$. Montrer que $W_h\subset\ker(T_h^2-3T_h+2id_E)$ puis que $\ker(T_h^2-3T_h+2id_E)=\ker(T_h-id_E)\oplus\ker(T_h-2id_E)$

c) En déduire que f est périodique.

3. Déterminer W_h

Exercice 10 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $M^k=I_2$. On note $d=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*, M^k=I_2\right\}$

1. M est-elle diagonalisable ?
   Justifier que $|\operatorname{Tr}(M)| \leqslant 2$
2. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont réelles. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
3. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont complexes non réelles.
   Montrer que le polynôme caractéristique de M est l'un des 3 polynômes suivants : $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Exercice 11 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA$

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non injectif. Déterminer le rang de ϕ_A dans le cas où le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples
2. On définit $\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ & & B & \longmapsto & \phi_B \end{array}$. Montrer que Φ est une application linéaire et déterminer son noyau
3. Déterminer les puissances de ϕ_A

Exercice 12 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$
2. Justifier, pour $n \geqslant 1$, la convergence de I_n et montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{3n}$
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $I_n \sim \dfrac{C}{n^{1/3}}$

Exercice 13 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
On considère le système $(1) : X' = A(t)X$, où $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$; une solution de (1) est une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dérivable et telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$

1. Étude de cas particuliers
   a) On suppose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (1) admet une unique solution telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b) On suppose $A(t) = (????)$. Montrer que (1) admet une unique solution telle que $X(0) = ?$
2. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique.
   a) Montrer que si Φ est solution de (1) alors $\|\phi\|$ est constante
   b) On suppose de plus A constante. Montrer que si Φ est solution de (1) alors il existe un cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) \in \mathcal{C}$

Exercice 14 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $u(P) = P'$

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u ne comporte que des 0 et des 1
2. Montrer, pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$
3. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geqslant 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$
4. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors Q est scindé sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
Soit E un espace euclidien

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors p est autoadjoint et p est 1-lipschitzien
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux ; montrer que le polynôme caractéristique de $p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que $\operatorname{Sp}(p+q) \subset [0, 2]$ puis déterminer $E_0(p+q)$ et $E_2(p+q)$

Exercice 16 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*
Un automate allume, à la date n, une diode rouge ou une diode verte. Si à la date n il allume une diode rouge, il allume une diode verte à la date $n+1$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$; si à la date n il allume une diode verte, il allume une diode rouge à la date $n+1$ avec une probabilité $q \in]0, 1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que la diode allumée soit rouge (resp. verte) à l'instant n

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ r_n \end{pmatrix}$, à l'aide de la formule des probabilités totales.

2. Déterminer $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} B + C = I_2 \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$ puis en déduire A^n pour $n \geqslant 1$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 17 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

Pour $x \in]0, \pi[$ fixé, on définit $S_x : t \longmapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} t^{p-1}\sin(px)$

1. Montrer que S_x est définie sur $[0,1[$ et calculer $S_x(t)$ pour $t \in [0,1[$

2. Justifier que S_x est intégrable sur $[0,1[$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t$

3. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}$

Exercice 18 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

On pose, pour $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_{n,p} = (-1)^p \dfrac{(2p+2)^n x^n}{(2p+1)!n!}$

1. Montrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

En déduire le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!n!}$

2. ?

3. ? éq diff

Exercice 19 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 20 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

Soient $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\phi : t \mapsto (2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t))$.

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ sur E.

2. Soient $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$ et $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.

a) Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.

b) Étudier les extremum de f sur $\overset{o}{\Delta}$

c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ

Exercice 21 **(Centrale PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note $(T_n = k)$ l'événement « au cours des n tirages on a obtenu exactement k boules distinctes ».

1. Donner $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$

2. Établir une relation entre $P(T_{n+1} = k+1)$, $P(T_n = k)$ et $P(T_n = k+1)$

3. En déduire l'espérance de T_n.

CCINP

Exercice 22 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$

a) Montrer que si U et V sont semblables et $R \in \mathbb{R}[X]$ alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

b) Calculer $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B

c) Montrer que si A est diagonalisable et $B = 0$ alors M est diagonalisable.

d) Soit $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, justifier que $A - \lambda I_n$ est inversible.

e) Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable et B est nulle

2. a) Énoncer le critère spécial des séries alternées

b) Étudier la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\cos\left[\pi n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

Exercice 23 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $g_n(t)=e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ pour $n\geqslant 1$ et $t\in[0,1]$

a) Rappeler l'inégalité des accroissements finis

b) Montrer que $\forall t\in[0,1], |g_n'(t)|\leqslant \frac{e^t}{n}$

c) En déduire $\left|e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-1\right|\leqslant\frac{te^t}{n}$

d) On pose, pour $x\in[0,1]$, $I_n(x)=\int_0^x e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t$. Étudier les convergences simples et uniformes de $(I_n)_{n in \mathbb{N}^*}$

2. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $u:M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longmapsto aM+bM^T$

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) Trouver un polynôme annulateur de u

c) u est-il diagonalisable ?

Exercice 24 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n+2}$

a) Montrer que $a_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

b) Étudier la monotonie de (a_n) et en déduire que $\sum(a_{n+2}-a_{n+1})$ diverge

c) On pose $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

d) Montrer que S est solution de $(x-1)y'+(x+1)y=0$

e) Déterminer la valeur de $S(x)$ puis de a_n

2. Soient $A_1,A_2,A_3,A_4\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}A_1\\A_3\end{pmatrix}$ et $C_2=\begin{pmatrix}A_2\\A_4\end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathrm{rg}(A)\leqslant\mathrm{rg}(C_1)+\mathrm{rg}(C_2)$

b) Montrer que $\mathrm{rg}(A)\leqslant\sum_{i=1}^4\mathrm{rg}(A_i)$

c) On suppose $A_3=0$ et $\mathrm{rg}(A_1)=\mathrm{rg}(A_4)=n$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice 25 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $b\in\mathbb{R}$ et $\Phi:P\in\mathbb{R}[X]\longmapsto(X-b)[P'+P'(b)]-2[P-P(b)]$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

b) Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $(X-b)^k$ divise $\Phi(P)$ pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$; on trouvera la plus grande valeur de k possible.

c) Trouver $\ker\Phi$

d) Trouver $\mathrm{Im}\,\Phi$

2. Soit $(E):t^2y''(t)+3ty'(t)+y(t)=t+\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

a) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz

b) On pose $g(x)=f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle à déterminer.

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 26 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $I_n(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n\,t}$, pour $x\geqslant 0$, et $I=\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{sh}^2\,t}{\mathrm{ch}^3\,t}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que I_n est définie sur $\mathbb{R}^+$

b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ℓ à déterminer.

c) Montrer que I_n est dérivable et calculer I_n'

d) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

e) Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}

f) Calculer $I_1(\ln 2)$ et en déduire $I_3(\ln 2)$

g) Déterminer un lien entre I, $I_1(\ln 2)$ et $I_3(\ln 2)$ et en déduire la valeur de I.

2. Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

a) Déterminer la loi de Y puis son espérance.

b) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

c) Déterminer la loi et l'espérance de Z

Exercice 27 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha(x)\cos^n(x)$

a) Déterminer le domaine de définition de f_α

b) Trouver une forme simplifiée de f_α sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) Discuter de l'intégrabilité de f_α sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

d) La série converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(x)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$

i. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$

ii. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, telle que $A^3 + 9A = 0$

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$

b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d) On suppose n impair ; montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 28 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$; on note G_X sa fonction génératrice.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$?

d) En déduire la probabilité que X soit paire.

e) Soit Y, indépendante de X, qui suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Calculer la probabilité que XY soit pair.

2. On définit $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^n = 0\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que les éléments de $\mathcal{N}$ sont trigonalisables mais pas forcément diagonalisables

b) Déterminer les matrices symétriques de $\mathcal{N}$

c) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Montrer que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 29 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

a) Montrer que $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$. Trouver une minoration du rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!}x^n$; on note f sa somme.

b) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f sur $]-1, 1[$.

c) Résoudre cette équation différentielle

d) En déduire la valeur de a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.

c) On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.

d) Étudier la réciproque.

Exercice 30 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que I_n est bien défini.

b) Montrer la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

c) Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

d) En admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$

2. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X_i \sim \mathscr{B}(p_i)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $q_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ et on suppose $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = p$

a) Trouver l'espérance et la variance de $\dfrac{1}{n}S_n$

b) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| > \varepsilon\right) = 0$

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) = 0$

Exercice 31 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

a) Montrer que $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $h = P(f)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $h \in C(f)$.

c) Soit $g \in C(f)$.

i. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g

ii. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de f et en déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.

iii. En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g.

iv. Montrer g puis que g est un polynôme en f

d) En déduire la dimension de $C(f)$.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'existence de I

b) Montrer que $I = 2\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}\right)$

Exercice 32 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. La secrétaire d'une société appelle les n clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les $n - X$ clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité p et on note Y le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note Z le nombre de clients joints au cours des deux appels et $q = 1 - p$.

a) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$

b) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

c) Déterminer $P(Z = 0)$ et montrer que $P(Z = 1) = np(1+q)q^{2n-2}$

d) Calculer $P(Y = h|X = k)$

e) Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{j-k} = \dbinom{n}{j}\dbinom{j}{k}$ puis $P(Z = j) = \dbinom{n}{j} q^{2n-2j}(1-q^2)^j$.
Quelle est la loi de Z ?

2. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,\pi], \mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $G = \{t \in E, t'' + t = 0\}$

a) Montrer qu'il existe t_1, t_2 tels que $G = \text{Vect}\{t_1, t_2\}$

b) Calculer $(t_1|t_2)$

c) En déduire l'expression de la projection orthogonale de $f \in E$ sur G

Exercice 33 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

a) Montrer que (a_n) converge

b) Étudier la série $\sum(-1)^n a_n$

c) On considère la série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et soit f sa somme.

i. Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

ii. En déduire la valeur de R.

iii. Montrer que a_n vérifie la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.

iv. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = id_E$ et $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leqslant \dim(E)$

a) Montrer que $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

b) Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$

c) En déduire que f et g sont deux projecteurs tels que $f \circ g = g \circ f = 0$

Exercice 34 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Un conducteur se place à un carrefour et compte le nombre de personnes qui n'ont pas attaché leur ceinture de sécurité. Le nombre de voitures qui passent au carrefour est noté X et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 200. La probabilité qu'un conducteur n'ait pas attaché sa ceinture est $\dfrac{3}{10}$, indépendamment les uns des autres. On note S le nombre de conducteurs sans ceinture et A le nombre de conducteurs ayant attaché leur ceinture.

a) Déterminer $P_{(X=n)}(S = k)$ pour $k, n \in \mathbb{N}^*$

b) Déterminer $P(S = k)$ et en déduire que S suit une loi de Poisson

c) A suit-elle une loi de Poisson ?

d) A et S sont-elles indépendantes ?

2. Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A^T B$

a) Calculer $A^T B + B^T A$

b) En déduire un polynôme annulateur de C

c) Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\text{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires

d) Montrer $A = B$

Exercice 35 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$

b) Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est > 0 puis que $S(x) = \dfrac{6x^2 + 6x - 4}{(x+1)(x-1)^2}$ pour $|x| < R$.

c) Trouver a, b, c tels que $S(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

d) Déterminer a_n en fonction de n.

e) Déterminer R

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left(M^T M\right)^2 = I_n$.

a) Montrer que M est inversible.

b) En déduire que M est symétrique.

c) Conclure que $M = I_n$.

Exercice 36 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 9-2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & 6-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$

a) Étudier la diagonalisabilité de M_α

b) Déterminer $\operatorname{rg}(M_\alpha)$

c) Déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) On cherche à résoudre $A^2 = M_{-1}$ et on pose $B = P^{-1}AP$

i. Montrer que $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow B^2 = \Delta$

ii. Montrer que si $B^2 = \Delta$ alors B et Δ commutent

iii. En déduire les matrices B telles que $B^2 = \Delta$

iv. Résoudre $A^2 = M_{-1}$

2. Soient $f_n(x) = \dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

a) Énoncer le théorème de convergence dominée

b) Monter que I_n existe.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$

Exercice 37 (CCINP PSI 2024) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

d) Calculer les limites en $+\infty$ de f et f'

e) Montrer que, pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

f) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ puis déterminer sa valeur.

2. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

a) Soient λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à λ. Calculer de 2 façons différentes $\left(\overline{AX}\right)^T AX$ et en déduire $|\lambda| = 1$

b) Soient B une autre matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A+B)| \leqslant 2^n$

Exercice 38 (CCINP PSI 2024) *[Indication] [Solution]*

1. Soient $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$

a) Déterminer les rayons des convergence de f et g.

b) Montrer que g est continue sur $[-1, 1[$

c) Déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$

d) Montrer que f peut se prolonger par continuité à $[-1, 1[$

e) Déterminer des équivalents de f et g en 1^-

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$, $M \neq I_n$ et $M^T M = M M^T$

a) Montrer que MM^T est diagonalisable et déterminer $\operatorname{Sp}(MM^T)$

b) En déduire que M est orthogonale

c) Si $n = 3$, déterminer les matrices M possibles

Exercice 39 (CCINP PSI 2024) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$

c) Montrer que $f(x) = xf(x-1)$ pour $x \geqslant 1$

On pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(u))\,du$ pour $n \geqslant 1$ et $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))\,du$ pour $x \geqslant 1$.

d) Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et donner φ'

e) Montrer que $\varphi'(x) = \ln(x)$ pour $x \geqslant 1$

f) Déterminer la limite de φ en $+\infty$

g) En déduire la nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$

2. a) Soit p un projecteur de E, espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, puis que p est diagonalisable et donner une matrice diagonale associée à p

b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ distincts, $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$ et $M^3 = \lambda^3 A + \mu^3 B$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 40 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$

a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum f_n(x)$ converge.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

b) Déterminer le domaine de continuité de f

c) Étudier les variations de f

d) Montrer que pour u grand on a $\mathrm{sh}(u) \geqslant e^{u/2}$

e) Montrer que $f(x)$ est équivalente à $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, x}$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton

b) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C \neq 0$ et $AC = CB$.

i. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k C = C B^k$

ii. En déduire $P(A)C = CP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

iii. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

Exercice 41 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$

a) i. Trouver les valeurs propres de A.

ii. A est-elle diagonalisable ?

iii. Déterminer la dimension du noyau de A.

b) Pour $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $\phi(X) = AXA$

i. Trouver les valeurs propres de ϕ.

ii. ϕ est-il diagonalisable ?

iii. Déterminer l'image de ϕ.

2. Soient $\lambda > 0$ et l'équation différentielle $xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$

a) Résoudre $xy' + \lambda y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) Déterminer la forme des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation initiale à l'aide d'une intégrale.

c) Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Exercice 42 **(CCINP PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

b) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\ker(A)) = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\mathcal{X}_C$ en fonction de $\mathcal{X}_A$ et en déduire le spectre de C en fonction du spectre de A.

c) Calculer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$ lorsque $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta = \gamma$ puis lorsque $\beta \neq 0$, $\alpha = 2\beta$ et $\gamma = -\beta$. En déduire $\mathrm{Sp}(B)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$ dans ces deux cas.

d) Montrer que si $X \in \ker(A)$ alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(B)$ et en déduire que $\dim(\ker(B)) \geqslant 2\dim(\ker(A))$

e) Diagonaliser B pour $\alpha = -1$, $\beta = 3$ et $\gamma = 2$ avec A la matrice de la première question.

2. Pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$.

a) Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$

b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$, avec $a \in]0,1]$, puis sur $[0,1]$

Mines-Télécom

Exercice 43 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \ln\left(e^{x_n} - x_n\right)$.

b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

c) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis convergente

d) Étudier la nature de $\sum x_n$

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq id_E$ et $u^3 = id_E$

a) Soient $E_1 = \ker(u - id_E)$ et $E_2 = \ker(u^2 + u + id_E)$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

b) Calculer $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ (u + 2id_E)$ et en déduire $E = E_1 \oplus E_2$

c) Justifier que, si $\dim(E)$ est impaire, alors $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$

Exercice 44 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer J^2 puis montrer que l'équation $M^2 = J$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ telle que ?

i. ?

ii.

2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$

a) Déterminer le domaine de définition de S

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) Montrer que S est continue en 0

Exercice 45 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé

a) Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

b) Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; déterminer $\dim(E)$ et $d(1, E)$

c) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$

2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x)$

d) f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 46 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$.

a) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$.

c) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[-1,1]$?

d) ?

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ℓ une forme linéaire non nulle sur E, $a \in E$ non nul et f définie par $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E. Que vaut $f(a)$?
b) Trouver les éléments propres de f

Exercice 47 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Donner les solutions polynômiales de $(x^2-1)y''(x)+2xy'-2y=0$.
b) On pose $y(x)=xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z
c) Déterminer a,b,c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $]-1,1[$.

2. Soit $D=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$

a) Donner, sans calcul, le rang de D, $\ker(D)$ et $\operatorname{Im}(D)$
b) Diagonaliser D

Exercice 48 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace euclidien et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u\in E, (f(u)|u)=0$
a) Développer $(f(x+y)|x+y)$
b) En déduire une relation entre $(f(x)|y)$ et $(f(y)|x)$
c) Si $\lambda\in\operatorname{Sp}(f)$, montrer que $\lambda=0$. f est-il diagonalisable ?
d) Montrer que $(\ker f)^\perp=\operatorname{Im}(f)$
e) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale adaptée à la décomposition $E=\ker(f)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(f)$. Que dire de la matrice de f dans $\mathcal{B}$?

2. Soit (E) l'équation différentielle $x^2y''+4xy'+2y=\dfrac{1}{1-x}$ sur $]0,1[$
a) Déterminer les solutions de l'équation homogène de la forme $x\mapsto x^\alpha$. En déduire les solutions de l'équation homogène.
b) Donner le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$
c) Déterminer les solutions de (E)

Exercice 49 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $x>-1$ et $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(1+x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$
a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$
b) Calculer $f'(x)$ en utilisant le changement de variable $u=\dfrac{1}{\tan t}$
c) En déduire la valeur de f

2. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Soient $X=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $H=\operatorname{Vect}\{X,Y\}$.

Écrire la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur H.

Exercice 50 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Trouver les solutions développables en séries entières de l'équation $y''+xy'+y=1$ telles que $y(0)=y'(0)=0$

2. Deux joueurs font une séance de tirs aux buts. Le joueur 1 marque, à chacun de ses essais, avec une probabilité p_1 ; le joueur 2 avec une probabilité p_2. Le joueur 1 tire en premier, puis ils tirent chacun à leur tour jusqu'à ce que l'un d'entre eux marque.
a) Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne ?
b) Justifier que le jeu se termine presque surement.
c) Déterminer une relation entre p_1 et p_2 de sorte que le jeu soit équitable

Exercice 51 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, telle que $A^3+9A=0$
a) Montrer que $\operatorname{Sp}(A)\subset\{0,3i,-3i\}$

b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
c) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
d) On suppose n impair ; montrer que A n'est pas inversible.
e) Trouver les matrices symétriques solutions

2. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 52 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Diagonaliser A
b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$
   i. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, -2, 2, -3\}$
   ii. Déterminer les matrices M telles que $M^2 + M = A$

2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + (-1)^n n}$
Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est continue

Exercice 53 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition de Γ
b) Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$
c) Montrer que $\forall x > 0, \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$

2. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, f(a), f^2(a))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$
b) Quelle est la matrice de f dans cette base ?
c) Montrer que $\det(M + I_3) = 1$
d) Montrer que $\det(A + M) = \det(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec M

Exercice 54 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x^2 y' - y = x^2 - x + 1$. On note F la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1 de $f : x \mapsto e^{1/x}\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

a) Déterminer les solutions de (E)
b) Trouver une solution polynômiale de (E)
c) En déduire F

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, tel que $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E

a) Montrer que $\|f(e_i)\|$ est constante
b) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$

Indications

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) $\sin(x-t) = \dots$

b) Montrer que $T(f)$ est $\mathcal{C}^2$

2. b) Pour l'équivalent en 0, poser $u = x^{-\alpha/4}t$

Exercice 2 *[sujet]* **2.** b) Trouver une base de W.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** c) Écrire P sous forme factorisée et identifier ses coefficients en fonction de α et β.

d) s et t sont solutions d'un polynôme du second degré.

Exercice 4 *[sujet]* **2.** Commercer par prouver $u([0,1]) \subset [-1,1]$ et étudier $x \mapsto x - x^2$ sur $[-1,1]$.

Exercice 5 *[sujet]* **2.** Choisir aléatoirement deux points parmi les points dont les affixes sont les racines $N^{\text{ème}}$ de l'unité (donc régulièrement répartis).

Exercice 6 *[sujet]*

Exercice 7 *[sujet]* **1.** b) Calculer $\phi(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$

2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) \geqslant \frac{p(p-1)}{2}$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** b) Calculer $\|A\|^2$ pour la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 9 *[sujet]* **2.** Dériver la relation vérifiée par f

Exercice 10 *[sujet]*

Exercice 11 *[sujet]* **2.** Calculer $\phi_B(E_{i,j})$

Exercice 12 *[sujet]* **3.** Considérer $\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n)$

Exercice 13 *[sujet]* **2.** a) Étudier $\varphi : t \mapsto \|\Phi(t)\|^2$

b) Dans $\mathbb{R}^3$ un cercle est l'intersection d'un plan et d'une sphère. Commencer par justifier qu'il existe $X_0 \neq 0$ tel que $AX_0 = 0$.

Exercice 14 *[sujet]* **3.** Résoudre l'éq diff

4. Commencer par placer les racines de P' par rapport aux racines de P en utilisant le th de Rolle.

Exercice 15 *[sujet]* **3.** Calculer $((p+q)(x)|x)$ et utiliser des bon de vecteurs propres de p ou de q.

Exercice 16 *[sujet]*

Exercice 17 *[sujet]* **3.** Utiliser le TCD appliqué aux sommes partielles de la série (géométrique)

Exercice 18 *[sujet]*

Exercice 19 *[sujet]*

Exercice 20 *[sujet]*

Exercice 21 *[sujet]* **3.** Utiliser la fonction génératrice.

Exercice 22 *[sujet]*

Exercice 23 *[sujet]*

Exercice 24 *[sujet]*

Exercice 25 *[sujet]* **1.** d) Utiliser la base $\left((X-b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ plutôt que la base canonique

Exercice 26 *[sujet]*

Exercice 27 *[sujet]* **1.** d) Étudier la CVN puis la valeur de f_α dans les cas où il n'y a pas la CVN.

Exercice 28 *[sujet]*

Exercice 29 *[sujet]* **2.** c) distinguer les cas $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 30 *[sujet]*

Exercice 31 *[sujet]*

Exercice 32 *[sujet]*

Exercice 33 *[sujet]*

Exercice 34 *[sujet]* **2.** c) Vérifier que C est orthogonale et que les 2 espaces sont orthogonaux

Exercice 35 *[sujet]*

Exercice 36 *[sujet]* **2.** c) Calculer $\lim I_n$ sous forme d'une intégrale pour commencer

Exercice 37 *[sujet]* **2.** b) Faire apparaître $A^{-1}B$ et son polynôme caractéristique

Exercice 38 *[sujet]*

Exercice 39 *[sujet]*

Exercice 40 *[sujet]*

Exercice 41 *[sujet]* **1.** b) iii. Écrire $A = CC^T$ avec C un vecteur colonne

Exercice 42 *[sujet]*

Exercice 43 *[sujet]*

Exercice 44 *[sujet]* **2.** c) Montrer la CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 45 *[sujet]*

Exercice 46 *[sujet]*

Exercice 47 *[sujet]*

Exercice 48 *[sujet]*

Exercice 49 *[sujet]*

Exercice 50 *[sujet]*

Exercice 51 *[sujet]*

Exercice 52 *[sujet]* **2.** Pour la continuité en 0, examiner $f(x) - f(0)$.

Exercice 53 *[sujet]* **2.** d) Vérifier que $A^{-1}M$ est nilpotente.

Exercice 54 *[sujet]*

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) T est linéaire et $T(f)(x) = \sin(x)\int_0^\pi \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^\pi \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ donc $T(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

b) On vérifie $T(f)'' + T(f) = 0$. Si $T(f) = 0$ alors $T(f)'' = -T(f) = 0$ donc $f(x) = ax + b$ et on vérifie que f ne vérifie $T(f) = 0$ que si $a = b = 0$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(T)$. Si $T(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ puis on a $T(f)'' = \lambda f''$ et $T(f)'' = -T(f) = -\lambda f$ donc f est solution de $\lambda f'' = -\lambda f$, ce qui donne $f'' + f = 0$ donc $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. On vérifie alors $T(f)(x) = \dfrac{\pi}{2}(a\sin(x) + b\cos(x))$ donc $T(f) = \lambda f$ si et seulement si $a = b$ avec $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$. On donc $\mathrm{Sp}(T) = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ et $E_{\pi/2}(f) = \mathrm{Vect}\{\sin + \cos\}$

c) Si on note $a = \displaystyle\int_0^\pi \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ et $b = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$, on a $T(f) = a\sin + b\cos$ donc $T^2(f) = \dfrac{\pi}{2}(a\cos + b\sin)$ puis $T^{2k}(f) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2k}(a\cos + b\sin)$ et $T^{2k+1}(f) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2k+1}(a\sin + b\cos)$. On a donc $S = \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)(a\cos + b\sin) + \mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)(a\sin + b\cos)$

d) ?

2. a) Si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ alors $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{t^4 + a^\alpha}$ intégrable sur le segment $[0,1]$

b) En $+\infty$, le TCDPC s'applique avec $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^4}$ si $x \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 0$. Puis $I(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1 + x^{-\alpha}t^4}$ donc $x^\alpha I(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$ par TCDPC avec $\left|\dfrac{1}{1+x^{-\alpha}t^4}\right| \leqslant 1$.

En 0, on trouve directement un équivalent : $I(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^{-\alpha}t^4} \overset{u = x^{-\alpha/4}t}{=} \dfrac{1}{x^\alpha}\int_0^{x^{-\alpha/4}} \dfrac{x^{\alpha/4}\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$ donc $x^{3\alpha/4}I(x) = \displaystyle\int_0^{x^{-\alpha/4}} \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^4} \xrightarrow[x\to0^+]{} \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^4} > 0$ et $I(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^{3\alpha/4}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** a) $F_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

b) $S(x) = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} - \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$ pour $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

c) $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ par somme (avec $R_1 \neq R_2$)

2. a) si $(f|f) = 0$ alors $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$ sur $[0,1]$ car $f^2 + (f')^2$ est continue et positive donc $f^2 = 0$; le reste est facile

b) On a $W = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$ avec $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_n : x \mapsto e^{-x}$ donc si $f \in E$, on écrit $f = \alpha f_1 + \beta f_2 + g$ avec $g \in V$ donc $\alpha = \dfrac{ef(1) - f(0)}{e^2 - 1}$ et $\beta = \dfrac{e^{-1}f(1) - f(0)}{e^{-2} - 1}$ puis $g = f - \alpha f_1 - \beta f_2$ (puis synthèse ok) ; on a donc $E = V \oplus W$.

Si $f \in V$ et $g \in W$ alors $(f|g) \overset{\text{IPP}}{=} \displaystyle\int_0^1 fg + \Big[fg'\Big]_0^1 - \int_0^1 fg'' = \int_0^1 fg - \int_0^1 fg = 0$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** a) $P\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{P(z)}{z^4}$ donc si z est racine alors $z \neq 0$ car $P(0) = 1$ et $P\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$

b) $P(1) < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ donc P s'annule sur $]1, +\infty[$ (par continuité)

c) $s+t$ est la somme des 4 racines complexes de P donc, au signe près, le coeff de X^3, ie $s+t = 8$. Puis si on identifie le coeff de X^2 dans les 2 écritures de $P = X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 8X + 1 = (X-\alpha)\left(X - \dfrac{1}{\alpha}\right)(X-\beta)\left(X - \dfrac{1}{\beta}\right)$, on a $12 = \dfrac{\alpha}{\alpha} + \alpha\beta + \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\beta} + \dfrac{1}{\alpha\beta}$ dont on déduit $st = 12 - 2 = 10$

d) $t - 2 = \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0$ puis s et t sont les racines de $X^2 - 8X + 10$ donc $t = 4 + \sqrt{6}$ et $s = 4 - \sqrt{6} \in]0,2[$

e) Comme $s - 2 = \dfrac{(\beta-1)^2}{\beta} > 0$ si $\beta > 0$, et $s < 0$ si $\beta < 0$, et $s \in]0,2[$, β ne peut pas être réel. On en déduit, car P est réel, que la 4$^{\text{ème}}$ racine de P est en fait $\overline{\beta}$ donc $\dfrac{1}{\beta} = \overline{\beta}$ ce qui donne $|\beta|^2 = \beta \times \dfrac{1}{\beta} = 1$

2. a) $P(N=n,M=k)=P(M=k|N=n)P(N=n)$ et $P(M=k|N=n)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ On en déduit $P(M=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{a^ne^{-a}}{n!}=e^{-ap}\frac{(ap)^k}{k!}$ donc $M\sim\mathscr{P}(ap)$ et $E(M)=ap$

b) On trouve de même que $N-M\sim\mathscr{P}(a(1-p))$ puis $P(M=i,N-M=j)=P(M=i,N=i+j)=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j=P(M=i)P(N-M=j)$ donc indép

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) cours

b) ϕ_A est bien une forme linéaire et par linéarité de Tr, on a $\phi_{\alpha A+\beta B}(M)=\alpha\phi_A(M)+\beta\phi_B(M)$

c) $\det(C)=(-1)^{n+1}$ et $\mathrm{Tr}(J_rC)=0$

d) Si H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une forme linaire $\ell\neq 0$ telle que $H=\ker(\ell)$ puis il existe A (unique) telle que $\ell=\phi_A$ donc $H=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathrm{Tr}(AM)=0\}$. Si $\mathrm{rg}(A)=r$, il existe $P,Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A=PJ_rQ^{-1}$ (cf ex fait en cours) donc, avec $M=QCP^{-1}$, on a $\mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(PJ_rCP^{-1})=\mathrm{Tr}(J_rC)=0$ donc $M\in H$ et H est inversible (produit de matrices inversibles)

2. on a $|u(t)|=|u(t)-u(0)|\leqslant|t|\leqslant 1$ donc $u(t)\in[-1,t]\subset[-1,1]$ puis, $x\mapsto x-x^2$ est croissante sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ donc $u(t)-u(t)^2\leqslant\begin{cases}t-t^2 & \text{si } t\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \text{si } t\geqslant\frac{1}{2}2\end{cases}$. On en déduit $\displaystyle\int_0^1(u-u^2)\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}(t-t^2)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}t}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$. Si $u(t)=\begin{cases}t & \text{si } t\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \text{si } t\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$, on a $u\in E$ et $\displaystyle\int_0^1(u-u^2)=\frac{5}{24}$ donc $\displaystyle\max_{u\in E}\int_0^1(u-u^2)=\frac{5}{24}$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** a) Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^n p_kX^k$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^n q_kX^k$ (avec $n\geqslant\deg(P)$ et $n\geqslant\deg(Q)$) alors $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n p_kq_k$ donc unicité si existence et $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n p_kq_k$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

b) si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^d p_kX^k\in F^\perp$ alors $(P|1)=0$ car $1\in F$ et $(P|1)=p_0$ donc $p_0=0$. De même, $Q_k=(2^{d+1}-1)X^k-(2^k-1)X^{d+1}\in F$ donc $(P|Q_k)=0$ et, si $k\leqslant d$, on a $(P|Q_k)=(2^{d+1}-1)p_k$ donc $p_k=0$ et $P=0$. On en déduit $F^\perp=\{0\}$. Puis $F\oplus F^\perp=F\neq\mathbb{R}[X]$

c) Comme $F\oplus F^\perp\neq\mathbb{R}[X]$, on ne peut pas introduire de projection orthogonale sur F et on doit utiliser $d(X,F)=\displaystyle\inf_{P\in F}\|X-P\|$ seulement. Si $Q_n=X-\dfrac{X^n}{2^n-1}$ alors $Q_n\in F$ donc $d(X,F)\leqslant\|X-Q_n\|=\dfrac{1}{2^n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $d(X,F)=0$

on en déduirait $X\in\overline{F}$ mais pourtant $X\notin F$ car $F\neq\overline{F}$, ie F n'est pas fermé

2. On suppose le cercle centré en O et les points P_k, $0\leqslant k\leqslant N-1$, du cercle de rayon R d'affixes $Re^{2ik\pi/N}$ (régulièrement répartis sur le cercle). On choisit au hasard deux points distincts et on calcule la distance moyenne (ou l'espérance de la distance entre ces deux points). La probabilité de choisir un couple de points distincts est $\dfrac{1}{N(N-1)}$ donc la distance moyenne $D_N=\dfrac{R}{N(N-1)}\displaystyle\sum_{j\neq k}P_jP_k=\frac{2R}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left|e^{2ik\pi/N}-e^{2ij\pi/N}\right|$. On calcule ensuite $\left|e^{2ik\pi/N}-e^{2ij\pi/N}\right|=2\sin\dfrac{(k-j)\pi}{N}$ puis $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\left|e^{2ik\pi/N}-e^{2ij\pi/N}\right|=2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=0}^{k-1}e^{i(k-j)\pi/N}\right)=2\frac{\sin\frac{k\pi}{2N}\sin\frac{(k+1)\pi}{2N}}{\sin\frac{\pi}{2N}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2N}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}}{\sin\frac{\pi}{2N}}$ et enfin $D_N=\dfrac{2R}{N\sin\frac{\pi}{2N}}\times\dfrac{1}{N-1}\left[(N-1)\cos\dfrac{\pi}{2N}-\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$. Enfin, on termine par $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}=\cdots=-\cos\frac{\pi}{2N}$ donc $(N-1)\cos\dfrac{\pi}{2N}-\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}\underset{N\to+\infty}{\sim}(N-1)$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}D_N=\frac{4}{\pi}$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) On écrit $M=I_3+N$ et on vérifie $N^3=0$ donc, comme N et I_3 commutent, $M^n=I_3+nN+\dfrac{n(n-1)}{2}N^2$ pour $n\geqslant 2$

b) On vérifie (I_3,N,N^2) libre donc base de $\mathbb{K}[M]$

c) Si $AM = MA$ alors $AM^n = M^nA$ pour tout n donc $AN = NA$ et $AN^2 = N^2$. On vérifie que si $AN^2 = N^2A$ alors $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ puis une telle matrice vérifie aussi $AN = NA$ si et seulement si $a = e$ et $b = f$ donc $A = aI_3 + bN + \dfrac{c-b}{2}N^2$, ce qui veut dire que $A \in \mathrm{Vect}\{M^n, n \in \mathbb{N}\}$ (récip évidente)

2. a) on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on vérifie $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ car $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+xt)(1+t^2)} \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}$ intégrable sur $[0,1]$. On a donc $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{t+x}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{\ln 2}{2(1+x^2)} + \frac{\pi}{4(1+x^2)}$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit le résultat

b) Avec $x = 1$, on a $I = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) $\phi(\lambda I_n) = \lambda\|x\|^2$ donc $\phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$: si $\alpha \in \mathbb{R}$, prendre $\lambda = \dfrac{\alpha}{\|x\|^2}$

b) Par C-Sch, $|\phi(M)| \leqslant \|MX\| \times \|X\| \overset{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} \|X\|^2$ donc $\phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset [-\|X\|^2, \|X\|^2]$. Si $|\alpha| \in [-\|X\|^2, \|X\|^2]$, on choisit une bon de $\mathbb{R}^n$ de sorte que $e_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$ et $M = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; on a alors $X = \|x\|e_1$ puis $MX = \|X\|(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2)$ donc $\phi(M) = \|X\|^2\cos\theta$. Il suffit alors de prendre θ tel que $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\|X\|^2}$ pour avoir $\phi(M) = \alpha$. On a donc $\phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = [-\|X\|^2, \|X\|^2]$

2. Si la série CV, on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} = S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais ici, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=n+1} 2nf(k) \geqslant \frac{n(n-1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ donc la série DV. On a bien $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) \geqslant \frac{p(p+1)}{2}$ car les entiers $f(n+1), \dots, f(n+p)$ sont p entiers distincts donc au moins égaux à $0, \dots, p-1$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** a) symétrique réelle

b) si $A^p = 0$ alors $B^p \overset{AA^T = A^TA}{=} A^p(A^T)^p = 0$ donc $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ (non vide car DZ) puis $B = P0P^T = 0$ et $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(B) = 0$ donc $A = 0$

2. a) $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin(x) > 0$ sur $]0,1]$ puis $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) > 0$

b) $f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} - a_n^n \leqslant 0$; (a_n) est croissante et bornée donc CV vers $\ell \in]0,1]$; $a_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\cos(a_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ell = 1$

c) $\ln(\cos(a_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\cos\ell) < 0$ donc $a_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\cos(a_n)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{n}(\ln(\cos 1) + o(1))\right) = 1 + \dfrac{\ln(\cos 1)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 9 *[sujet]* **1.** Facile

2. a) Vérification de $f_n \in W_h$ facile (les 2 intégrales sont nulles) puis f_n est un vecteur propre de $f \mapsto f''$ avec la valeur propre $\left(\dfrac{2n\pi}{h}\right)^2$ donc c'est une famille de vecteurs propre associé à des valeurs propres 2 à 2 distinctes donc une famille libre (sinon prendre une combinaison linéaire finie, dériver deux fois et raisonner par récurrence, cf preuve de la prop précédemment évoquée). On en déduit que W_h n'est pas de dimension finie.

b) En dérivant par rapport à x, on trouve $f(x+2h) - f(x+h) = 2(f(x+h) - f(x))$ donc inclusion ok. Si $f = u+v$ (analyse) alors $T_h(f) = u + 2v$ donc $v = T_h(f) - f$ et $u = 2f - T_h(f)$ (unique) et synthèse ok

c) u et v sont continues (car f et $T_h(f)$ le sont), et u est h-périodique donc bornée donc v est bornée. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $v(x_0 + nh) = 2^n v(x_0)$ n'est pas bornée donc $v = 0$ et $f = u$ est h-périodique.

3. Si f est h-périodique alors $\displaystyle\int_{x+h}^{x+2h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$ donc $f \in W_h$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (valeur moyenne nulle) donc W_h est l'ensemble des fct h-périodiques dont la valeur moyenne est nulle.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $X^k - 1$ est SARS donc DZ et $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_i^k = 1$ donc $|\lambda_i| = 1$ donc $|\mathrm{Tr}(M)| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant 2$

2. On a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\pm 1\}$ donc soit $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$ et $M = I_2$ (car DZ) donc $d = 1$, soit $\mathrm{Sp}(M) = \{-1\}$ et $M = -I_2$ donc $d = 2$, soit $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}$ puis $\mathcal{X}_M = X^2 - 1$ et $M^2 = I_2$ donc $d = 2$ (car $M \neq I_2$)

3. On a $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ car M est réelle avec $|\lambda| = 1$ donc $\det(M) = \lambda\overline{\lambda} = 1$ et $\mathcal{X}_M = X^2 - X\,\mathrm{Tr}(M) + 1$. De plus $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ et $\mathrm{Tr}(M) \neq \pm 2$ car sinon on aurait $\mathcal{X}_M = (X \pm 1)^2$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\mathrm{Tr}(M) \in \{-1, 0, 1\}$

4. Si $\mathcal{X}_M = X^2 + 1$ alors M est semblable à $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ donc $M^4 = I_2$ et $M^k \neq I_2$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$ donc $d = 4$

Si $\mathcal{X}_M = X^2 + X + 1$ alors M est semblable à $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ donc $M^3 = I_2$ et $M^k \neq I_2$ pour $k \in \{1, 2\}$ donc $d = 3$

Si $\mathcal{X}_M = X^2 - X + 1$ alors M est semblable à $D = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}$ donc $M^6 = I_2$ et $M^k \neq I_2$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$ donc $d = 6$

Pour finir, on est soit dans le cas de la question **2**, soit dans le cas se la question **3** car M est réelle donc ne peut pas avoir une seule racine complexe non réelle.

Exercice 11 *[sujet]* **1.** endomorphisme facile. $\ker(\phi_A) \neq \{0\}$ car $\phi_A(I_n) = 0$. On a $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coeff diagonaux 2 à 2 distincts puis $M \in \ker(\phi_A)$ si et seulement si $AM = MA \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$ et on vérifie alors que $P^{-1}MP$ est diagonale (fait plusieurs fois en cours) donc $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\ker(\phi_A)$ sur l'ensemble des matrices diagonales et $\dim(\ker(\phi_A)) = n$ donc $\mathrm{rg}(\phi_A) = n^2 - n$

2. On vérifie $\Phi(\alpha A+\beta B)(M) = (\alpha A+\beta B)M - M(\alpha A+\beta B) = \alpha(AM-MA)+\beta(BM-MB) = (\alpha\Phi(A)+\beta\Phi(B))(M)$ donc Φ est linéaire. De plus $B \in \ker(\Phi)$ si et seulement si $BM = MB$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on a donc $BE_{i,j} = E_{i,j}B$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ ce qui donne $B = \lambda I_n$ donc $\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}\{I_n\}$

3. Vérifier, par récurrence $\phi_A^k(M) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i A^i M A^{k-i}$

Exercice 12 *[sujet]* **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$ par concavité de $\ln$; $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ et $u_n - v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n)$ et (v_n) sont adjacentes

2. f_n esr continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{S} \mathrm{Im}\, \dfrac{1}{t^3 n}$ donc I_n existe. Puis $I_{n+1} - I_n = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{t^2}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{3n} I_n$.

3. On a $\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) = -\dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \left(\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) + \dfrac{1}{3n}\right)$ est ACV et, par télescopage, $\ln(I_n) - \ln(I_1) = -\dfrac{1}{3} H_{n-1} + K + o(1) = -\dfrac{1}{3}\ln(n) + K + \gamma + o(1)$; en composant par exp, on trouve l'équivalent souhaité.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** a) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. X est solution si et seulement si $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x''(t) = -x(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$ donc $X(t) = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ a\sin t - b\cos t \\ c \end{pmatrix}$ (récip ok) donc l'unique solution est $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

2. a) On pose $\varphi(t) = \|\Phi(t)\|^2 = (\Phi(t)|\Phi(t))$; φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = 2(\Phi(t)|\Phi'(t)) = 2(\Phi(t)|A(t)\Phi(t)) = 0$ car pour $A = -A^T$ et $X \in \mathbb{R}^3$, on a $(X|AX) = X^T(AX) = -X^TA^TX = -(AX)^TX = -(AX|X)$ donc $(AX|X) = 0$. On en déduit que φ est constante

b) On a $\det(A) = \det(A^T) = (-1)^3\det(A)$ donc $\det(A) = 0$ et il existe $X_0 \in \ker(A) \setminus \{0\}$. On pose alors $\psi(t) = (X_0|\Phi(t))$; ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(t) = (X_0|\Phi'(t)) = (X_0|A\phi(t)) = 0$ car, pour $X \in \mathbb{R}^3$, $(X_0|AX) = X_0^TAX = -X_0A^TX = -(AX_0)^TX = 0$. On en déduit que Φ est sur une sphère (car $\|\Phi\|$ est constante) et dans un plan (affine, orthogonal à X_0) donc sur un cercle.

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $\mathcal{B} = \left(\dfrac{X^k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} E_{i,i+1}$

2. $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ donc $u - id$ est bijectif

3. Les solutions de $y - y' = Q$ sont $y(x) = e^x\left(\alpha - \displaystyle\int_0^x e^{-t}Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$; $e^{-t}Q(t)\,\mathrm{d}t \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc si $\alpha \neq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,t$, $y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} Ce^x$ donc n'est pas polynômiale. On en déduit $P(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ si $Q \geqslant 0$

4. Si $\deg(P) = d \geqslant 1$ alors $\deg(Q) = d$. On note $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ les racines de P d'ordres $n_1, \ldots, n_r$; on a $n_1 + \cdots + n_r = d$. α_i est racine de P' d'ordre $n_i - 1$ donc racine de Q d'ordre $\geqslant n_i - 1$; on a donc au moins $(n_1 - 1) + \cdots + (n_r - 1) =$

$d-r$ racines de P' et de Q. Sur $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$, par le th de Rolle, P' s'annule au moins une fois en β_i. On a donc $\geqslant (n-r)+(r-1)=d-1$ racines de P' donc on les a toutes et β_i est racine simple de P'. P' change donc de signe en β_i ; de plus $\lim\limits_{\alpha_i}\dfrac{P}{P'}=0$ donc $Q\underset{\alpha_i}{\sim}-P'$ et Q aussi change de signe sur $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$. On a donc $\geqslant (d-1)$ racines supplémentaires de Q donc $\geqslant (d-r)+(r-1)=d-1$ racines. Supposons $P\geqslant 0$ sur $[\alpha_r,+\infty[$; on a aussi $P'\geqslant 0$ sur cet intervalle (car les racines de P' sont $\leqslant \alpha_r$ aussi et P ne peut pas être décroissant sur cet intervalle). On a donc $Q\underset{\alpha_r^+}{\sim}-P'<0$ et $Q\underset{+\infty}{\sim}P>0$ donc Q s'annule une fois de plus sur $]\alpha_r,+\infty[$. On a donc $\geqslant (d-1)+1=d$ racines de Q donc Q est bien scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** p autoadjoint fait en cours ; $E=\ker(p)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(p)$ donc si $x=x_0+x_1$ alors $\|x\|^2\overset{\text{Pyth}}{=}\|x_0\|^2+\|x_1\|^2\geqslant\|x_1\|^2$ et $\|p(x)\|^2=\|x_1\|^2$ donc $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$

2. $p+q$ est autoadjoint donc th spectral

3. On a $(p(x)|x)=\|x_1\|^2\in[0,\|x\|^2]$ donc $0\leqslant(p(x)+q(x)|x)\leqslant 2\|x\|^2$ et si $(p+q)(x)=\lambda x$ avec $c\neq 0$ alors $0\leqslant\lambda\|x\|^2\leqslant 2\|x\|^2$ donc $\lambda\in[0,2]$. De plus si $(p+q)(x)=0$ alors $(p(x)|x)+(q(x)|x)=0$; comme $(p(x)|x)\geqslant 0$ et $(q(x)|x)\geqslant 0$, on a $(p(x)|x)=(q(x)|x)=0$. Avec $(p(x)|x)=\|x_1\|^2$, on en déduit $(p(x)|x)=0\Leftrightarrow x\in\ker(p)$. On a donc $E_0(p+q)\subset E_0(p)\cap E_0(q)$ et la récip est évidente. On prouve de même $E_2(p+q)=E_1(p)\cap E_2(q)$

Exercice 16 *[sujet]* **1.** (V_n,R_n) est un SCE donc $P(V_{n+1})=P(V_{n+1}|V_n)P(V_n)+P(V_{n+1}|R_n)P(R_n)=(1-q)v_n+pr_n$, de même $r_{n+1}=qv_n+(1-p)r_n$ et $A=\begin{pmatrix}1-q & p\\ q & 1-p\end{pmatrix}$

2. $B=\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix}p & p\\ q & q\end{pmatrix}$ et $C=\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q & -p\\ -q & p\end{pmatrix}$. On vérifie $B^2=B$, $C^2=C$ et $BC=CB=0$ donc (binôme) $A^n=B^n+(1-p-q)^nC^n=B+(1-p-q)C$

3. Par continuité de $M\mapsto MX_0$ pour $X_0\in\mathbb{R}^2$ fixé (car linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension finie), on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}r_n\\ v_n\end{pmatrix}=\left[\lim\limits_{n\to+\infty}(B+(1-p-q)^nC)\right]\begin{pmatrix}r_0\\ v_0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}r_0\\ v_0\end{pmatrix}$ car $-1<1-p-q<1$ donc $\lim r_n=\dfrac{p}{p+q}(r_0+v_0)=\dfrac{p}{p+q}=\dfrac{p}{q}\lim v_n$

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $(\sin(px))$ est bornée donc $R\geqslant 1$ puis, si $|t|<1$, $S_x(t)=\operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}t^{p-1}e^{ipx}\right)=\operatorname{Im}\left(\dfrac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right)=\dfrac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}$

2. $|\cos x|<1$ donc S_x est continue sur $[0,\pi]$ et $\displaystyle\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sin x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)^2}=\left[\arctan\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)\right]_{t=0}^{t=1}=\arctan\frac{2\sin^2 x/2}{2\sin x/2\cos x/2}+\arctan\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{x}{2}+\arctan\frac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)}=\frac{\pi-x}{2}$

3. On remarque $\dfrac{\sin(px)}{p}=\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}\sin(px)\,\mathrm{d}t$ mais le TITT ne s'applique pas (car la série à trouver n'est en fait pas ACV) donc on applique le TCD à la suite des sommes partielles de S_x : on pose $T_n(t)=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}\sin(px)$, on a $\displaystyle\int_0^1 T_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(t)=S_x(t)$ si $t\in[0,1[$ et $|T_n(t)|=\left|\operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}e^{ipx}\right)\right|=\left|\operatorname{Im}\left(\dfrac{e^{ix}(1-t^pe^{ipx})}{1-te^{ix}}\right)\right|\leqslant\dfrac{1+t}{\sqrt{1-2t\cos x+t^2}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment. On déduit de tout cela $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin(px)}{p}=\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi-x}{2}$

Exercice 18 *[sujet]* **1.** pour $p\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,p}|=\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((2p+2)|x|)^n}{n!}=\frac{e^{(2p+2)|x|}}{(2p+1)!}=e^{|x|}\frac{(e^{|x|})^{2p+1}}{(2p+1)!}$. Avec le DSE de sh, on en déduit la CV de $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}|u_{n,p}|$ donc la famille est sommable par Fubini.

La série CV (absolument) pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $R=+\infty$. Le même calcul donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\overset{\text{Fubini}}{=}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!}=e^x\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!}=e^x\sin(e^x)$

2. ?

3. ?

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+(xt)^2}e^{-t} \leqslant te^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{2|x|t^3}{(1+(xt)^2)^2}e^{-t} \leqslant 2at^3e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a,a]$

2. $\mathbb{R}^+$ (et $\mathbb{R}^-$) est stable par f donc si $u_0 \geqslant 0$ alors $u_n \geqslant 0$, puis $\arctan(xt) \leqslant xt$ si $xt \geqslant 0$ (car arctan est concave sur $\mathbb{R}^+$) donc $f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} xte^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(2) = x$ donc (u_n) décroît, est minorée par 0 donc CV vers $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue) ; enfin, $f(x) - x = \displaystyle\int_0^{+\infty}(\arctan(xt) - xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t < 0$ si $x \neq 0$ donc $\ell = 0$

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $[2\sqrt{2}\cos(t)]^2 + 2[2\sin(t)]^2 = 8$ et si $(x,y) \in E$, on a $\left|\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{y}{2}\right|^2 = 1$ donc il suffit de prendre un argument du complexe $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{y}{2}$

2. a) f est continue sur Δ fermé borné non vide dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie

b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{\Delta}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, donc si f admet un extremum en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f. On vérifie que $(0,0)$ est le seul point critique dans $\overset{o}{\Delta}$; $f(0,0) = 1 \leqslant f(x,y)$ donc le minimum de f sur $\overset{o}{\Delta}$ est $1 = f(0,0)$

c) On a toujours $f \geqslant 1$ sur Δ donc $\min\limits_{\Delta} f = f(0,0) = 1$. Par contre $M = \max\limits_{\Delta} f$ est atteint en un point du bord de Δ donc en un point $(x,y) = \phi(t)$. On étudie donc $g(t) = f\circ\phi(t) = \sqrt{5+4\cos^2 t} + 8\cos^2 t$ qui est maximale en $t = 0$ donc $M = f(2\sqrt{2}, 0) = 11$.

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $P(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}}$: il faut tirer $n-1$ fois la même boule que la première. $P(T_n = 2) = \dbinom{N}{2}\left[\left(\dfrac{2}{N}\right)^n - 2\left(\dfrac{1}{N}\right)^n\right]$: on choisit 2 boules parmi les N et on tire n fois l'une des 2, et on retire les 2 cas où on ne tirerait qu'une seule des 2 boules choisies. Enfin, si $n \leqslant N$, $P(T_n = n) = \dbinom{N}{n}\dfrac{n!}{N^n}$: on choisit les n boules à tirer puis on les ordonne de façon à les tirer chacune une seule fois ; $P(T_n = n) = 0$ par contre si $n > N$.

2. $(T_{n+1} = k+1)$ est réalisé si $(T_n = k+1)$ était déjà réalisé et si on retire au rang $n+1$ une des $k+1$ boules déjà tirées ou si $(T_n = k)$ était réalisé et si on a tire au rang $n+1$ une des $N-k$ boules qui n'avaient pas encore été tirées. On en déduit $P(T_{n+1} = k+1) = \dfrac{k+1}{N}P(T_n = k+1) + \dfrac{N-k}{N}P(T_n = k)$.

3. $G_{n+1}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} P(T_{n+1} = k)t^k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P(T_n = k)t^k + \sum_{k=1}^{N} P(T_n = k-1)t^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(k-1)P(T_n = k-1)t^k = tG_n(t) + \dfrac{t(1-t)}{N}G_n'(t)$. On en déduit, avec $G_n(1) = 1$ et $E(T_n)G_n'(1)$, $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$, suite arithmético-géom et $E(T_n) = N - (N-1)\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$

Exercice 22 *[sujet]* **1.** a) cours

b) $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$

c) Soit P annulateur de A SARS, alors $P(M) = 0$ donc M est DZ

d) Cours

e) Soit P SARS tel que $P(M) = 0$; on a $P(A) = 0$ donc A est DZ, on a aussi $BP'(A) = 0$ et, si $P' = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ alors $\det(P'(A)) = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(-1)^n\mathcal{X}_A(\mu_i) \neq 0$ car les racines de P sont simples et $\mathrm{Sp}(A) \subset Z(P)$ donc les μ_i ne sont pas valeurs propres de A ; $BP'(A) = 0$ donne donc $B = 0$.

2. a) Cours

b) $\pi n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série CV (mais pas ACV)

Exercice 23 *[sujet]* **1.** a) Cours

b) $g_n'(t) = -\dfrac{t}{n}e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}$ donc $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$

c) $|g_n(t)-g_n(0)| \leqslant |t-0|\dfrac{e^t}{n}$ car $|g_n'| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$ sur $[0,t]$

d) $|I_n(x)-x| = \left|\displaystyle\int_0^x g_n(t)-1\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x |g_n(t)-1|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$ (indép de x) donc (I_n) CVU vers $id_{[0,1]}$ sur $[0,1]$

2. a) Facile

b) $u^2(M) = au(M)+b(aM^T+bM) = au(M)+b^2M+a(u(M)-aM) = 2au(M)-(a^2-b^2)M$ et $P = X^2-2aX+(a^2-b^2) = (X-a-b)(X-a+b)$ annule u

c) Si $b \neq 0$, P est SARS donc u est DZ et si $b=0$ alors $\forall M, u(M)=aM$ donc $u = aid$ est DZ aussi

Exercice 24 *[sujet]* **1.** a) réc

b) $a_{n+2}-a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+2} > 0$ donc (a_n) est croissante. On en déduit $a_n \geqslant 1$ et $a_{n+2}-a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+2}$ donc $\sum(a_{n+2}-a_{n+1})$ DV

c) $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1+\dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}$ donc $1 \leqslant \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leqslant 1+\dfrac{1}{n+2}$ puis $\lim \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1$ et $R=1$

d) $xS'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} na_nx^n = a_1x+\sum_{n\geqslant 0}(n+2)a_{n+2}x^{n+2} = x+\sum_{n\geqslant 0}[(n+2)a_{n+1}+a_n]x^{n+2} = x+\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n\geqslant 0}a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^{n+2} = x+x^2S'(x)+x(S(x)-a_0)+x^2S(x) = x^2S'(x)+x(x+1)S(x)$ d'où le résultat pour $x \neq 0$ et en $x=0$ par continuité en 0

e) $\dfrac{x+1}{x-1} = 1+\dfrac{2}{x-1}$ donc $S(x) = \dfrac{e^{-x}}{(x-1)^2}$ car $S(0)=a_0=1$

f) $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ donc, par produit de Cauchy, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k+1}{(n-k)!}$

2. a) Si $X \in \mathbb{R}^{2n}$ alors $AX = C_1X+X_2X \in \mathrm{Im}(C_1)+\mathrm{Im}(C_2)$

b) De même, $\mathrm{rg}(C_1) = \mathrm{rg}(C_1^T) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}A_1^T & A_3^T\end{pmatrix} \leqslant \mathrm{rg}(A_1^T)+\mathrm{rg}(A_3^T) = \mathrm{rg}(A_1)+\mathrm{rg}(A_3)$

c) A_1 et A_4 sont inversibles donc, matrice triangulaire par blocs, $\det(A) = \det(A_1)\det(A_4) \neq 0$ puis on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix}A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1}\\ 0 & A_4^{-1}\end{pmatrix}$

Exercice 25 *[sujet]* **1.** a) Facile

b) $\Phi(P)(b) = \Phi(P)'(b) = \Phi''(b) = 0$ puis $\Phi^{(3)}(b) = P''(b) \neq 0$ si $P = X^2$ donc $k=3$

c) Si $\Phi(P)=0$ et si $P = a_dX^d+\dots$ est de degré $d \geqslant 1$ (donc $a_d \neq 0$) alors le coefficient de X^2 dans $\Phi(P)$ est da_d-2a_d donc $d=2$; on a ensuite $\Phi(\alpha X^2+\beta X+\gamma)=0$ donc $\ker(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$

d) On a vu que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset (X-b)^3\mathbb{R}[X]$ et si $Q = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}q_k(X-b)^k \in (X-b)^2\mathbb{R}[X]$, on cherche $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}p_k(X-b)^k$ de sorte que $\Phi(P)=Q$. On vérifie $\phi(P) = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}(k-2)p_k(X-b)^k$ donc il suffit de prendre $p_k = \dfrac{q_k}{2-k}$ pour $k \geqslant 3$ (et $p_0=p_1=p_2=0$ par ex) donc $\mathrm{Im}(\Phi) = (X-b)^3\mathbb{R}[X]$

2. a) Cours

b) On commence, avec $f(t) = g(\ln t)$, par justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $t^2f''(t)+3tf'(t)+f(t) = g''(\ln t)+2g'(\ln t)+g(\ln t)$ donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de $g''(x)+2g'(x)+g(x) = 2\,\mathrm{ch}(x)$.

c) On trouve $g(x) = e^{-x}(\alpha x+\beta)+\dfrac{e^x}{4}+\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ donc $f(t) = \dfrac{1}{t}(\alpha\ln t+\beta)+\dfrac{t}{4}+\dfrac{(\ln t)^2}{2t}$

Exercice 26 *[sujet]* **1.** a) f_n est continue sur $[0,x]$

b) par TCD : (f_n) CVS sur $]0,x]$ vers 0 et $|f_n| \leqslant 1$ intégrable sur $[0,x]$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 0$

c) f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc I_n est $\mathcal{C}^1$ et $I_n'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n x}$

d) f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, pour $n \geqslant 1$, car $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^ne^{-nt}$. On en déduit, par croissance de I_n, $\|I_n\|_\infty = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par TCD avec $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t} = f_1(t)$ donc (I_n) CVU vers 0 sur $\mathbb{R}^+$

e) $I_{n+2}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{n+2} t}\,\mathrm{d}t = I_n(x) - \int_0^x \operatorname{sh} t \times \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{n+2} t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} I_n(x) + \frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\operatorname{ch}^{n+1} x} - \frac{1}{n+1} I_n(x)$

f) $I_1(\ln 2) = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2e^{-t}}{1+(e^{-t})^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-2\arctan(e^{-t})\Big]_0^{\ln 2} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}\right)$ et $I_3(\ln 2) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{25}$

g) $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^3 t}\,\mathrm{d}t = I_1(\ln 2) - I_3(\ln 2) = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} - \frac{6}{25}$

2. a) $Y(\Omega) \subset [2, +\infty[\cap \mathbb{N}$ et pour $k \geqslant 2$, $(Y = k)$ si on tire le même jeton qu'au premier tirage (proba $1/3$) aux tirages $2, \dots, k-1$ et un autre jeton (proba $2/3$) au tirage k. Par indépendance des tirages, on a $P(Y = k) = \dfrac{1}{3^{k-2}}\dfrac{2}{3}$.
$Y - 1 \sim \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc $E(Y) = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

b) si $k > h$, $P(Y = k, Z = h) = P(Z = h | Y = k)P(Y = k)$ et si $(Y = k)$ est réalisé, on aura $(Z = h)$ si et seulement si on tire un des deux jetons tirés au cours des tirages $k+1, \dots, h-1$ (proba $2/3$) et le dernier jeton (proba $1/3$) au tirage k donc $P(Z = h | Y = k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k-1}\dfrac{1}{3}$ puis $P(Y = k, Z = h) = \dfrac{1}{3^{k-1}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k}$

c) pour $h \geqslant 3$, on a $P(Z = h) = \displaystyle\sum_{k=2}^{h-1} P(Y = k, Z = h) = \frac{2^{h-1} - 2}{3^{h-1}}$ puis $E(Z) = \dfrac{11}{2}$

Exercice 27 *[sujet]* **1.** a) on pose $g_n(x) = \sin^\alpha(x)\cos^n(x)$ géométrique de raison $\cos(x)$ donc $\sum g_n(x)$ ACV si $|\cos x| < 1$ et si $\cos(x) = \pm 1$ alors $f_\alpha(x) = 0$ donc $D_\alpha = \mathbb{R}$

b) $f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^\alpha x}{1 - \cos x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f_\alpha(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^{2-\alpha}}$ donc f_α intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha > 1$

d) $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\arctan\sqrt{\dfrac{\alpha}{n+1}}\right) = \left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{n+1}}\right)^\alpha \left(1 + \dfrac{\alpha}{n+1}\right)^\alpha \left(1 + \dfrac{\alpha}{n+1}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha^{\alpha/2} e^{-\alpha}}{n^{\alpha/2}}$ donc CVN si et seulement si $\alpha > 2$. Pour $\alpha \leqslant 2$ f_α n'est pas continue en 0 donc pas de CVU

e) i. $u_n(\alpha) \geqslant 0$ et, si $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^N u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^N \sin^\alpha x \cos^n x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$; SATP dont les sommes partielles sont majorées donc $\sum u_n(\alpha)$ CV. Pour $\alpha \leqslant 1$, $u_n(\alpha) \geqslant u_n(1) = \left[-\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum u_n(\alpha)$ DV

ii. $u_n(3) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1 - \cos^2 x)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ donc, par CVN sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2. a) $P = X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ annule A

b) P est SARS dans $\mathbb{C}$

c) si A est DZ dans $\mathbb{R}$ alors $a = QDQ^{-1}$ avec $Q = 0$ donc $A = 0$, absurde

d) A est réelle donc $m_{3i}(A) = m_{-3i}(A)$ donc $m_0(A) = n - 2m_{3i}(A)$ est impair, donc non nul et $\det(A) = 0$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** a) $P(X \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^n P(X = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$ et vérifier par IPP successives.

b) $P(X \leqslant n) = F_X(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ (par continuité croissante) donc $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \sim n!$

c) $G_X(1) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} P(X = k)$ et $G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k P(X = k)$

d) $P(X \in 2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{2}(G_X(1) + G_X(-1)) = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$

e) $(XY \in 2\mathbb{N}) = (Y = 2) \cup (X \in 2\mathbb{N})$ donc $P(XY \in 2\mathbb{N}) = P(Y = 2) + P(X \in 2\mathbb{N}) - P(Y = 2)P(X \in 2\mathbb{N})$ par indépendance

2. a) X^n annule A donc $\operatorname{Sp}_\mathbb{C}(A) = \{0\}$ (non vide) et $\mathcal{X}_A = X^n$ est scindé donc TZ ; $A = E_{1,2} \in \mathcal{N}$ n'est pas DZ

b) Si $A \in \mathcal{N}$ est symétrique alors A est DZ et $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ donc $A = 0$

c) $A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ donc $\dim(F) + \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(F \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \leqslant n^2$ donc $\dim(F) \leqslant n^2 - \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) Récurrence. Comme $a_n \geqslant 1$, on en déduit $R \geqslant 1$

b) On pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et on a $(n+2)b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ donc $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)b_{n+1}x^n = b_1 + \sum_{n\geqslant 0}(n+2)b_{n+2}x^{n+1} = b_1 + \sum_{n\geqslant 0}(b_{n+1}+b_n)x^{n+1} = b_1 + (f(x) - b_0) + xf(x)$ donc f est solution de $y'(x) = (1+x)y(x)$ avec $y(0) = 1$.

c) On en déduit $f(x) = e^{x+x^2/2} = e^x \times e^{x^2/2}$

d) $f(x) = \left(\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n x^n\right)$ avec $\alpha_{2n} = \dfrac{1}{2^n n!}$ et $\alpha_{2n+1} = 0$. Par produit de Cauchy, on a $\dfrac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha_k}{(n-k)!}$ puis on distingue les cas n pair/impair. (En fait on a $R = +\infty$)

2. a) On vérifie par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on fait attention ensuite à $B^0 = I_{2n}$ (donc au terme constant dans $P(B)$)

b) $\mathrm{rg}(B = \mathrm{rg}(A)$

c) Si A est DZ, on introduit $Q = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ SARS et annulateur de A. On distingue ensuite si $Q(0) = 0$ (ie $0 \in \mathrm{Sp}(A)$) ou non : si $Q(0) = 0$ alors Q annule B et est SARS donc B est DZ ; si $Q(0) \neq 0$ alors $P = XQ$ reste SARS et annule B donc B est DZ aussi.

d) Si B est DZ alors il existe P SARS annulateur de B, donc de A et A est DZ.

Exercice 30 *[sujet]* **1.** a) f_n est continue sur le segment $[0,1]$

b) $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$ (ou TCD)

c) On pose $u = t^n \Leftrightarrow t = u^{1/n}$ qui donne $I_n = \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ puis TCD avec $g_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ et $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ intégrable sur $]0,1]$ car $\lim_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$; on finit avec $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \neq 0$

d) si $u \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$ puis TITT avec $\int_0^1 \left|(-1)^{n+1}\dfrac{u^{n-1}}{n}\right|\mathrm{d}u = \dfrac{1}{n^2}$; on en déduit $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ puis en séparant les termes pairs/impairs (sur la somme partielle !), $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$

2. a) Par linéarité de l'espérance, $E\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) = q_n$. De même, $V\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)$ car les X_i sont indép

b) On applique B-T à $\dfrac{1}{n}S_n$: $P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)}{n^2\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}1 = n$ donc $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)}{n^2\varepsilon} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) $\lim q_n = p$ donc il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |q_n - p| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$. Par inégalité triangulaire, $\left|\dfrac{1}{n}S_n - p\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| + |q_n - p| \leqslant \left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| + \dfrac{1}{2}\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Ainsi, si $\left|\dfrac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon$, on a $\left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| > \dfrac{1}{2}\varepsilon$ si $n \geqslant n_0$, ie $\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| > \dfrac{1}{2}\varepsilon\right)$ puis $P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - q_n\right| > \dfrac{1}{2}\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 31 *[sujet]* **1.** Tout est fait en cours

a) φ est injectif (si $P \in \ker(\varphi)$ alors $\deg(P) \leqslant n-1$ et P a au moins n racines distinctes) et égalité des dimensions

b) cours : $\mathbb{K}[f]$ est commutatif (pour la composition)

c) i. cours

ii. $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ car $\mathcal{X}_f$ est SARS puis $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}\{e\}$ est une droite stable par g donc e est aussi un vecteur propre de g

iii. une base de vp de f convient

iv. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{diag}(\mu_i)$, les λ_i sont 2 à 2 distincts donc on prend $P = \varphi^{-1}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$

d) On vient de prouver, par double inclusion $C(f)=\mathbb{K}[f]$ puis $\mathbb{K}[f]=\operatorname{Vect}\{id,f,\dots,f^{n-1}\}$ par C-Ham : si $P\in\mathbb{K}[X]$ alors $P=Q\mathcal{X}_f+R$ avec $\deg(R)\leqslant n-1$ et $P(f)=R(f)\in\operatorname{Vect}\{id,f,\dots,f^{n-1}\}$; et pour finir $(id,f,\dots,f^{n-1})$ est libre car si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i f^i=0$ alors $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i X^i$ annule f donc $\operatorname{Sp}(f)\subset Z(P)$ donc $\deg(P)\leqslant n-1$ et P possède au moins n racines distinctes donc $P=0$, ie $\alpha_i=0$. Au final $\dim(C(f))=n$

2. a) $\lim\limits_0 f=0$ et $\lim\limits_1 f=1$

b) si $t\in]0,1[$, $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nt^n(\ln t)^2$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^1|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=n\int_0^1 t^n(\ln t)^2\,\mathrm{d}t\ \overset{2\text{ IPP}}{=}\ \frac{2n}{(n+1)^3}$. On a donc $I=2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)^3}=2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\right)$

Exercice 32 *[sujet]* **1.** a) $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ puis cours

b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$

c) $(Z=0)$ est l'événement « avoir 2 échecs consécutifs » donc $P(Z=0)=q^{2n}$.
$(Z=1)\overset{\text{incomp}}{=}(X=1,Y=0)\cup(X=0,Y=1)$ puis $P(X=1,Y=0)=npq^{n-1}\times q^{n-1}$ et $P(X=0,Y=1)=q^n\times npq^{n-1}$

d) $P(Y=h|X=k)=\dbinom{n-k}{h}p^hq^{n-k-h}$ pour $0\leqslant h\leqslant n-kk$

e) relation facile puis $P(Z=j)=\displaystyle\sum_{k=0}^{j}P(Y=j-k|X=k)P(X=k)\overset{\text{rel}}{=}\binom{n}{j}p^j\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}q^{2n-j-k}=\binom{n}{j}[p(1+q)]^j(1-q^2)^j$ donc $Z\sim\mathscr{B}(n,q^2)$

2. a) $G=\operatorname{Vect}\{\sin,\cos\}$

b) $(\sin|\cos)=\displaystyle\int_0^\pi\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t=\frac12\int_0^\pi\sin(2t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $(\sin,\cos)$ est une base orthogonale de G.

c) On vérifie $\|\sin\|^2=\|\cos\|^2=\dfrac{\pi}{2}$ donc une bon de G est $\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos\right)$ et on en déduit, pour $x\in[0,\pi]$, $\pi_G(f)(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\sin(x)+\int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t\cos(x)\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** a) (a_n) tend vers 0 par TCD avec $\left|\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right|\leqslant 1$

b) CSSA

c) i. $\dfrac{1+t^2}{2}\geqslant t^2$ donc $a_n\geqslant\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n+1}$

ii. on en déduit $R\leqslant 1$ et comme $\sum a_nx^n$ CV pour $x=-1$, on a $R\geqslant 1$ donc $R=1$.

iii. On a $a_n\overset{\text{IPP}}{=}\left[t\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 t\times nt\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t=1-n(2a_n-a_{n-1})$ donc $(2n+1)a_n=1+na_{n-1}$

iv. on en déduit $x(2-x)f'(x)+(1-x)f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

v. Remarques : les solutions de l'équation homogène sont, sur $]0,1[$ ou $]-1,0[$, $y_0(x)=\dfrac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}}$ donc les solutions sur ces intervalles sont $y(x)=\dfrac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}}+f(x)$ et la seule solution sur $]-1,1[$ est f (si $\alpha\neq 0$, pas de limite finie en 0.
Si on souhaite déterminer la valeur de $f(x)$, par TITT ou CVN de $f_n:t\mapsto\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^nx^n$ sur $[0,1]$ $(\|f_n\|_\infty^{[0,1]}\leqslant|x|^n$ et $|x|<1)$, on a $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}t}{2-(1+t^2)x}$ qui se calcule en décomposant en éléments simples (selon le signe de x) ; tous calculs faits, on trouve $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right)$ si $x>0$ et $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\arctan\sqrt{\dfrac{-x}{2-x}}$ si $x<0$.

2. a) Si $x\in\mathcal{E}$ on a $x=id(x)=f(x)+g(x)\in\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$

b) $\dim(E)=\dim(\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g))\leqslant\dim(\operatorname{Im}(f))+\dim(\operatorname{Im}(g))\leqslant\dim(E)$ donc $\dim(E)=\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)$

c) $f=id\circ f=f^2+g\circ f$ donc si $x\in E$, $f(x)-f^2(x)=g\circ f(x)\in\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0\}$ donc $f^2=f(x)$ et $g\circ g(f)=0$; idem pour les autres égalités

Exercice 34 *[sujet]* **1.** On note $p = \dfrac{3}{10}$ et $\lambda = 200$

a) $S_{(X=n)} \sim \mathscr{B}(n,p)$, ie $P(S=k|X=n) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

b) $P(S=k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k|X=n)P(X=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \overset{h=n-k}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{p^k(1-p)^h}{k!h!} e^{-\lambda}\lambda^{h+k} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$ donc $S \sim \mathscr{P}(\lambda p)$

c) De même, $A \sim \mathscr{P}(\lambda(1-p))$

d) $P(A=h, S=k) = P(X-S=h, S=k) = P(S=k, X=h+k) = \dbinom{h+k}{k} p^k(1-p)^h e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{h+k}}{(h+k)!} = P(A=h)P(S=k)$ donc A et S sont indép

2. a) $MM^T = I_n$ donne $A^TB + B^TA = 2I_n$

b) on a $C + C^T = 2I_n$ et $CC^T = I_n$ (C est aussi orthogonale) donc $C^2 + I_n = 2C$

c) si $X \in \ker(C - I_n)$ et $Z = CY - Y \in \mathrm{Im}(C - I_n)$ alors $CX = X$ donc $(X|Z) = (X|CY - Y) = (CX|CY) - (X|Y) = 0$

d) $(C - I_n)^2 = 0$ donne $\mathrm{Im}(C - I_n) \subset \ker(C - I_n)$ donc $\{0\} = \mathrm{Im}(C - I_n) \cap \ker(C - I_n) = \mathrm{Im}(C - I_n)$ donc $C = I_n$ et $A = B$

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) récurrence (triple)

b) On en déduit $R \geqslant \dfrac{1}{2}$. $S(x) = -4 + 2x + 4x^2 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_{n+3}x^{n+3} = -4 + 2x + 4x^2 + x(S(x) + 4 - 2x) + x^2(S(x) + 4) - x^3S(x)$

c) $S(x) = \dfrac{-1}{1+x} - \dfrac{7}{1-x} + \dfrac{4}{(1-x)^2}$

d) $S(x) = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n - 7\sum_{n\geqslant 0} x^n + 4\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ donc $a_n = -7 + 4(n+1) + (-1)^{n+1}$

e) $R = 1$

2. a) Comme $\det(M) = \det(M^T)$, on a $\det(M)^5 = 1$ donc $\det(M) = 1$ (réelle)

b) $M^{-1} = \left(M^TM\right)^{-2}$ est symétrique (définie positive) donc M aussi

c) Reste $M^5 = I_n$, M est DZ par th spec et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1\}$ (pas de vp complexe) donc $M = PI_nP^T = I_n$

Exercice 36 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_{M_\alpha} = (X-1)(X-4)(X-1-\alpha)$ SARS si $\alpha \notin \{0, 3\}$ puis $\mathrm{rg}(M_0 - I_3) = 1$ donc $\dim(E_1(M_0)) = m_1(M_0)$ et M_0 est DZ ; de même, $\mathrm{rg}(M_3 - 4I_3) = 2$ donc $\dim(E_4(M_3)) = 1 \neq m_4(M_3)$ donc M_3 est DZ. Ainsi M_α est DZ si et seulement si $\alpha \neq 3$

b) Si $\alpha \neq -1$, $0 \notin \mathrm{Sp}(M_\alpha)$ donc M_α est inversible et $\mathrm{rg}(M_\alpha) = 3$; M_{-1} est DZ donc $\mathrm{rg}(M_{-1})) = 3 - \dim(E_0(M_{-1})) = 3 - m_0(M_{-1}) = 2$

c) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) i. $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow PB^2P^{-1} = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow B^2 = \Delta$

ii. $B\Delta = B^3 = \Delta B$

iii. si $B\Delta = \Delta B$ alors B est diagonale (car les coeff diagonaux de Δ sont 2 à 2 distincts) donc $B = \mathrm{diag}(a, b, c)$ puis $B^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases}$ on a donc 4 solutions : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$

iv. 4 solutions aussi : PBP^{-1} avec les 4 matrices B précédentes (les 4 solutions sont différentes car $B \mapsto PBP^{-1}$ est bijective)

2. a) cours

b) $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

c) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{e^x - 1}{x}$ donc $\lim I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$ par TCD avec $|f_n(x)| = \dfrac{e^{n\ln(1+x/n} - 1}{x} \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x}$ intégrable sur $]0, 1]$ car $\lim x \to 0 \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Puis $\dfrac{e^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$ pour $x \in [0, 1]$ (en prolongeant la fct par continuité en 0), cette série entière possède un RCV $R=+\infty$ donc (par CVN sur $[0,1]$), $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** a) $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ puis $\lim\limits_0 \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

b) Fait au dessus (domination)

c) $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ donc $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x>0$ (mêmes justifications) ; puis $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = |1-\cos(t)|e^{-xt} \leqslant 2e^{-at}$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$ pour $x>0$

d) On vérifie $0\leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}\leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}$ si $x>0$. De même, $0\leqslant f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f' = 0$ (ou TCDPC)

e) si $x>0$, $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$ donc $C=0$

f) $f(0) \overset{\text{IPP}}{)} = I$ (donc I existe). On a, pour $x>0$, $f(x) = x\ln(x)-\dfrac{x}{2}\ln(1+x^2)-\arctan(x)+D$ puis $D=\dfrac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Par continuité de f en 0, on a $I=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$

2. a) $AX=\lambda X$ donc $\left(\overline{AX}\right)^T AX = \left(\overline{\lambda X}\right)^T\lambda X = |\lambda|^2\left(\overline{X}\right)^T X$ et $\left(\overline{AX}\right)^T AX = \left(\overline{X}\right)^T A^T AX = \left(\overline{X}\right)^T X$; comme $\left(\overline{X}\right)^T X = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$ car $X\neq 0$, on en déduit $|\lambda|^2=1$

b) $|\det(A+B)| = |\det(A)|\times|\det(I_n+A^{-1}B)| \overset{\det(A)=\pm 1}{=} |\det(I_n+A^{-1}B)| = |\mathcal{X}_{A^{-1}B}(-1)|$ et $A^{-1}B\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $|\mathcal{X}_{A^{-1}B}(-1)| = \displaystyle\prod_{i=1}^n|-1-\lambda_i| \leqslant \prod_{i=1}^n(1+|\lambda_i|)\leqslant 2^n$ où les λ_i sont les valeurs propres complexes (répétées avec multiplicité) de $A^{-1}B$ donc $|\lambda_i|\leqslant 1$ avec la première question appliqué à $A^{-1}B$.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** a) $R_f=R_g=1$ car $1\leqslant \ln(n)\leqslant n$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{-1}{n}$ par ex

b) si $x\in]-1,0]$, $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n$ est alternée et vérifie le CSSA donc $|R_n(x)|\leqslant -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ (indép de x) donc CVU sur $[-1,0]$ et g est continue sur $[-1,0]$

c) si $|x|<1$, $(1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^{n+1} \overset{k=n+1}{=} \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{k=3}^{+\infty}\ln(k-1)x^k = \sum_{n=2}^{+\infty}[\ln(n)-\ln(n-1)]x^n = -g(x)$

d) $f(x) = \dfrac{g(x)}{1-x} \xrightarrow[x\to-1^+]{} \dfrac{g(-1)}{2}$

e) on prouve $g(x)\underset{1}{\sim} h(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n = -\frac{\ln(1-x)+x}{x}$: si $|x|<1$, $g(x)-h(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left[\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n+\frac{1}{n}\right]x^n$ qui CVN sur $[-1,1]$ car $\left|\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n+\dfrac{1}{n}\right]x^n\right| \leqslant \left[-\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n-\dfrac{1}{n}\right]\sim\dfrac{1}{2n^2}$; on en déduit $\lim\limits_{x\to 1} g(x)-h(x)=\ell\in\mathbb{R}$ et $g(x)\underset{1}{\sim} h(x)\underset{1}{\sim}\ln(1-x)$. On en déduit $f(x) = \dfrac{g(x)}{1-x}\underset{1}{\sim}\dfrac{-\ln(1-x)}{x-1}$

2. a) MM^T est sym réelle et $(MM^T)^3 \overset{MM^T=M^TM}{=} M^3(M^T)^3 = I_n$ donc $\mathrm{Sp}(MM^T)\subset\{1\}$ puis $\mathrm{Sp}(MM^T)=\{1\}$ (car DZ donc non vide)

b) On a donc $MM^T = PI_nP^T = I_n$ par th spectral

c) $M^3=I_3$ donc $\det(M)^3=1$ et $\det(M)=1$ donc M est une matrice de rotation. Si $M=R(\theta)$ alors $M^3=R(3\theta)$ donc les solutions sont les matrices de rotations d'angles $\pm\dfrac{2\pi}{3}$: $M = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\end{pmatrix}P^T$ avec $P\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

Exercice 39 *[sujet]* **1.** a) $f(x)=\Gamma(x+1)$ donc cf cours

b) cf cours
c) par IPP, cf cours
d) on a $f(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$ donc $x \mapsto \ln(f(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1))$
e) $\varphi'(x) = \ln \dfrac{f(x)}{f(x-1)} = \ln(x)$ d'après Q.c
f) On en déduit $\varphi(x) = x\ln(x) - x + C \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
g) CSSA donc CV

2. a) cours et dans une base adaptée à $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$ avec $r = \mathrm{rg}(p)$
b) On vérifie $M(M-\lambda I_n)(M-\mu I_n) = 0$ (chercher à éliminer A et B avec les 3 équations) puis $X(X-\lambda)(X-\mu)$ est SARS

Exercice 40 *[sujet]* **1.** a) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-n|x|}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$
b) $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ et f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (par imparité)
c) f_n décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f aussi (et imparité)
d) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} e^{-u/2}\,\mathrm{sh}(u) = +\infty$
e) pour $x \geqslant 1$ et $n \geqslant n_0 \geqslant u_0$ (celui de la question précédente, n_0 est indép de x) et on choisit $n_0 \geqslant 3$, on a $nx \geqslant u_0$ donc $f_n(x) \leqslant e^{-nx/2}$. On en déduit $0 \leqslant f(x) - \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x} \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n_0-1} f_k(x) + \sum_{k=n_0}^{+\infty} e^{-kx/2} = \sum_{k=2}^{n_0-1} f_k(x) + \frac{e^{-n_0x/2}}{1-e^{-x/2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ (la somme restante est finie) ; comme $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

2. a) cours
i. par récurrence
ii. facile avec $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^k$
iii. Avec $P = \mathcal{X}_A$ et C-Ham, on a $C\mathcal{X}_A(B) = 0$ donc $\mathcal{X}_A(B)$ n'est pas inversible et $\mathrm{Sp}(B) \cap Z(\mathcal{X}_A) \neq \emptyset$ qui donne le résultat car $Z(\mathcal{X}_A) = \mathrm{Sp}(A)$

Exercice 41 *[sujet]* **1.** a) i. $\mathcal{X}_A = X^3$
ii. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $A \neq 0$, A ne peut pas être DZ
iii. $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc $\dim(\ker A) = 2$
b) i. On vérifie $A^2 = 0$ donc $\phi^2(X) = A(AXA)A = 0$ puis $\mathrm{Sp}(\phi) = \{0\}$ car X^2 annule ϕ (et le spectre est non vide dans $\mathbb{C}$)
ii. Si ϕ était DZ, avec $\mathrm{Sp}(\phi) = \{0\}$, on aurait $\phi = 0$ ce qui est absurde car $\phi(E_{1,1}) \neq 0$ par ex
iii. Avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, on a $A = CC^T$ donc $\phi(X) = CC^TXCC^T = (C^TXC)CC^T$ car $\alpha = C^TXC \in \mathbb{C}$ donc $\phi(X) = \alpha A$ et $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Vect}\{A\}$. Comme $\phi \neq 0$, on a $\mathrm{Im}(\phi) \neq \{0\}$ donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}\{A\}$

2. a) $y_H(x) = \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
b) Par variation de la constante, $y(x) = \dfrac{\alpha}{x^\lambda} + \dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_1^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc la seule solution éventuellement bornée est pour $\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ donc $y(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ qui est bien bornée car $|y(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x t^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A = X^2(X-3)$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc $\dim(E_0(A)) = 2$ et A est DZ
b) $\mathcal{X}_C(\lambda) = \mathcal{X}_A(\lambda)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(C)$.
c) $\mathcal{X}_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & \lambda I_n \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda I_n - \gamma A & -\beta A \\ \lambda I_n - \gamma A & \lambda I_n \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda I_n - \gamma A & -\beta A \\ 0 & \lambda I_n + \beta A \end{vmatrix}$ donc $\mathcal{X}_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - \gamma A)\det(\lambda I_n + \beta A) = (-\gamma\beta)^n \mathcal{X}_A\left(\dfrac{\lambda}{\gamma}\right)\mathcal{X}_A\left(-\dfrac{\lambda}{\beta}\right)$ donc si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors $\mathrm{Sp}(B) = \{-\beta\lambda_1, \dots, -\beta\lambda_n, \gamma\lambda_1, \dots, \gamma\lambda_n\}$
De même, $\mathcal{X}_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - 2\beta A & -\beta A \\ \beta A & \lambda I_n \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda I_n - \beta A & -\beta A \\ -\lambda I_n + \beta A & \lambda I_n \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda I_n - \beta A & -\beta A \\ 0 & \lambda I_n - \beta A \end{vmatrix}$ donc $\mathcal{X}_B(\lambda) = (\det(\lambda I_n - \beta A))^2 = (\beta)^{2n}\mathcal{X}_A\left(\dfrac{\lambda}{\beta}\right)^2$ donc si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors $\mathrm{Sp}(B) = \{\beta\lambda_1, \dots, \beta\lambda_n, \beta\lambda_1, \dots, \beta\lambda_n\}$ (les ordres de multiplicité sont doublés)

d) $B\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. On vérifie de même que si $X\in\ker(A)$ alors $\begin{pmatrix}0\\X\end{pmatrix}\in\ker(B)$ puis si $(X_1,\dots,X_p)$ est une base de $\ker(A)$ alors $\begin{pmatrix}X_1\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}X_p\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\X_1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\X_p\end{pmatrix}$ est une famille libre de $\ker(B)$ (à justifier) donc $\dim(\ker(B))\geqslant 2p=2\dim(\ker(A))$

e) On est dans le cas $\alpha+\beta=\gamma$ donc $\mathcal{X}_B(\lambda)=X^4(X+9)(X-6)$ puis $\ker(B)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}X_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\X_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\X_2\end{pmatrix}\right\}$ avec $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_{-9}(B)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3X\\-2X\end{pmatrix}\right\}$ avec $X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\in E_3(A)$ et $E_6(B)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}X_3\\X_3\end{pmatrix}\right\}$

2. a) (f_n) CVS vers 0 sur $[0,1]$

b) si $x\in[a,1]$, $|f_n(x)|\leqslant nxe^{-nx^2}\leqslant ne^{-na^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc CVUTS de $]0,1]$ alors que $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sin\left(\frac{\sqrt{n}}{e}\right)$ ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur $[0,1]$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** a) exp est convexe

b) $e^{x_n}-x_n\geqslant 1$ donc x_{n+1} existe (rec) et $x_n>0$

c) $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-x_n)\leqslant\ln(e^{x_n})=x_n$ donc (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc CV vers ℓ tel que $\ell=\ln(e^\ell-\ell)\Leftrightarrow(e^\ell-\ell)=e^\ell$, ie $\lim x_n=0$

d) $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-x_n)=\ln\left(1+\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right)=\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)$ donc $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=0$ et $\sum x_n$ CV

2. a) Si $x\in E_1\cap E_2$ alors $u(x)=0$ et $0=u^2(x)+u(x)+x=3x$ donc $x=0$

b) $(u^2+u+id_E)-(u-id_E)\circ(u+2id_E)=3id_E$ donc si on pose $a=(u^2+u+id_E)(x)$ et $b=-(u-id_E)\circ(u+2id_E)(x)$, on a $a+b=3x$, $u(a)=(u^3-id)(x)=0$ et $(u^2+u+id_E)(b)=-(u+2id_E)\circ(u^3-id_E)(x)=0$ donc $E=E_1\oplus E_2$

c) Si $E_2=\{0\}$ alors $E_1=E$ et $u=id_E$, absurde. Si $E_1=\{0\}$ alors $E_2=E$ donc $u^2+u+id_E=0$ ce qui est absurde car X^2+X+1 n'a pas de racines réelles donc $\mathrm{Sp}(u)=\emptyset$ et comme $\dim(E)$ est impaire, $\deg\mathcal{X}_u$ aussi donc $\mathcal{X}_u$ admet au moins une racine réelle

Exercice 44 *[sujet]* **1.** a) $J^2=0$ donc on aurait $M^4=0$, M serait nilpotente donc $\mathcal{X}_M=X^2$ puis (C-Ham) $M^2=0$ qui est absurde

b) i.

2. a) si $x>0$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $f_n(0)=0$ et $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$ si $x<0$ donc $D_S=\mathbb{R}^{+*}$

b) si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$ alors $|f_n(x)|\leqslant\frac{be^{-na}}{\ln n}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

c) $|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k\geqslant n+1}xe^{-kx}=\frac{1}{\ln(n+1)}\times\frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\leqslant\frac{C}{\ln(n+1)}$ car $x\mapsto\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** a) Si $(P|P)=0$ alors $P^{(k)}(a)=0$ pour $k\leqslant n$ donc a est racine de P d'ordre $\geqslant n+1$ donc $P=0$; le reste est facile

b) $E=\{1\}^\perp$ est un hyperplan donc $\dim(E)=n$ et $d(1,E)=\|1\|=1$ puisque $1\perp E$

c) $\frac{1}{k!}(X-a)^k$

2. a) $|f_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n^2}$ donc CVN sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{+\infty}f=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}1n^2$

b) f est impaire et si $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$ alors $|f_n'(x)|=\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\leqslant\frac{1}{n(1+n^2a^2)}\sim\frac{1}{a^2n^3}$ donc $\sum f_n'$ CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

c) $f'(x)=\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ pour tout N, donc si f' admet une limite finie en 0^+, on a (somme finie) $\lim_{0^+}f\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ pour tout N, ce qui est absurde. Comme f' est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit $\lim_{0^+}f'=+\infty$. On peut aussi prouver $f'(x)\underset{0^+}{\sim}-\ln(x)$ par comparaison avec une intégrale.

d) Par CVN, f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc par TAF, $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{0^+}f'=+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0

Exercice 46 *[sujet]* **1.** a) $\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0$ donc (f_n) CVS vers 0 sur $[-1,1]$

b) $|f_n(x)| \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

c) $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin(e^{-1/n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) \neq 0$ donc pas de CVU sur $[0,1]$, ni sur $[-1,1]$

d) ?

2. a) Facile et $f(a) = 0$

b) $f^2(x) = -\ell(a)f(x)$ donc $P = X(X+\ell(a))$ annule f donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, -\ell(a)\}$. Puis $f(x) = -\ell(a)x \Leftrightarrow \ell(x) = 0$ (car $a \neq 0$) donc $-\ell(a) \in \mathrm{Sp}(f)$ et $E_{-\ell(a)}(f) = \ker(\ell)$ est un hyperplan. De plus $f(a) = 0$ et $a \neq 0$ donc $0 \in \ker(f)$. Si $\ell(a) = 0$ alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ et $E_0(f) = \ker(\ell)$ est un hyperplan (dans f non DZ) et si $\ell(a) \neq 0$ alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0, -\ell(a)\}$, $E_{-\ell(a)} = \ker(\ell)$ est un hyperplan donc $\dim(E_0(f)) \leqslant 1$ puis $E_0(f) = \mathrm{Vect}\{a\}$ (et f est bien DZ)

Exercice 47 *[sujet]* **1.** a) Elles sont de degré 1, on trouve αx

b) y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ si et seulement si z l'est et y est solution si et seulement si z vérifie $x(x^2-1)z'' + 2(2x^2-1)z' = 0$

c) $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ puis $z'(x) = \dfrac{\alpha}{x^2(x^2-1)}$ sur chacun des 4 intervalles de $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ puis $z(x) = \alpha\left(\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) + \beta$ et $y(x) = \alpha\left(-1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \beta x$ sur $]-1,0[$ ou $]0,1[$. Recollement en 0 : on trouve $y(x) = \alpha\left(-1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \beta x$ sur $]-1,1[$ avec $y(0) = -\alpha$.

2. a) $C_2 = C_3 = C_4$, $C_1 = C_2 + C_5$ et (C_1, C_2) libre donc $\mathrm{rg}(D) = 2$, $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Vect}\{C_1, C_2\}$ et $\ker(D) = \mathrm{Vect}\{(0,1,-1,0,0), (0,1,0,-1,0), (1,-1,0,0,-1)\}$

b) 0 est racine triple de $\mathcal{X}_D$ donc on développe directement et $\mathcal{X}_D = X^3(X+2)(X-3)$, $E_3(D) = \mathrm{Vect}\{(3,2,2,2,3)\}$ et $E_{-2}(D) = \mathrm{Vect}\{(-1,1,1,1,-1)\}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** a) $(f(x+y)|x+y) = (f(x)|y) + (f(y)|x)$

b) $(f(x)|y) = -(f(y)|x)$

c) Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors $\lambda\|x\|^2 = (f(x)|x) = 0$ donc $\lambda = 0$. Si f est DZ alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0$ et $f = 0$

d) si $x \in \ker(f)$ et $y = f(a) \in \mathrm{Im}(f)$ alors $(x|y) = (x|f(a)) = -(f(x)|a) = 0$ puis th du rang

e) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. De plus $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r$ et $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ donc A est inversible et comme $a_{i,j} = (e_i|f(e_j)) = -(e_j|f(e_i)) = -a_{j,i}$ donc $A^T = -A$

2. a) si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors $x^2 f_\alpha''(x) + 4xf_\alpha(x) + 2f_\alpha(x) = (\alpha+1)(\alpha+2)x^\alpha$ donc $f_{-1} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $f_{-2} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont solutions de (E_H). Comme le th de C-Lip s'applique sur $]0,1[$, les solutions de (E_H) (sev de dim 2) sont $\mathrm{Vect}\{f_{-1}, f_{-2}\}$

b) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$

c) On cherche une solution de (E) DSE : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R > 0$; on trouve $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_n x^n$ donc y est solution sur $]0,R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)a_n = 1$. On a donc $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $R = 1$. Une solution est donc $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)x^n = \frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}$ et les solutions de (E) $y : x \longmapsto \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x^2} + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** a) si $x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue donc intégrable sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis, si $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t} \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{1+a\sin^2 t}$ intégrable car continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) $u \mapsto \arctan\dfrac{1}{u}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, puis $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $\dfrac{1}{\sin^2} = \dfrac{\cos^2+\sin^2}{\sin^2} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2}$ donc $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1+x)(1+u^2)} \overset{x\neq 0}{=} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x+u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left[\arctan u - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\arctan\frac{u}{\sqrt{1+x}}\right]_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi(\sqrt{1+x}-1)}{x\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}$ qui est aussi valable en 0 par continuité de f'

c) Comme $f(0)=0$, on trouve $f(x)=\pi\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right)$

2. Une bon de H est $u=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $v=\dfrac{1}{\sqrt{7\times 13}}\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\1\end{pmatrix}$ puis $\pi_H(x)=(u|x)u+(v|x)v$, ce qui donnera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\pi_H)=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}2&3&3&2\\3&11&-2&3\\3&-2&11&3\\2&3&3&2\end{pmatrix}$

Exercice 50 *[sujet]* **1.** si $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $R>0$, on a $y''(x)+xy'(x)+y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)[(n+2)a_{n+2}+a_n]x^n$ donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $2a_2+a_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=\dfrac{-a_n}{n+2}$. Avec $y(0)=y'(0)=0$, on a $a_0=0$ et $a_1=0$ donc $\forall p\in\mathbb{N}, a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{(-1)^{p+1}}{2^pp!}$ pour $p\geqslant 1$. On a donc $R=+\infty$ et $y(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{p+1}}{2^pp!}x^{2p}=1-e^{-x^2/2}$

2. a) On note A_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ tir est marqué » et B_n « le joueur 1 gagne à sont $n^{\text{ème}}$ tir ». On a $B_n=\bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_{2k-1}}\cap\overline{A_{2k}})\cap A_{2n}$ donc, par indép des tirs, $P(B_n)=(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}p_1$ puis, si G_1 est « le joueur 1 gagne », on a $G_1=\bigcup_{n\geqslant 1}B_n$ et par incomp 2 à 2 des B_n, $P(G_1)=\dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$

b) si D_n est « pas de vainqueur avant le tir $2n$ », on a $D_n=\bigcap_{k=1}^{n-1}(\overline{A_{2k-1}}\cap\overline{A_{2k}})$ puis $P(D_n)=(1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}$ et par continuité décroissante, la probabilité que le jeu dure indéfiniment est $\lim_{n\to+\infty}P(D_n)=0$

c) La probabilité que le joueur 2 gagne est alors $P(G_2)=1-P(G_1)=\dfrac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$ et le jeu est équitable si et seulement si $p_1=p_2-p_1p_2$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** a) $P=X^3+9X=X(X-3i)(X+3i)$ annule A

b) P est SARS dans $\mathbb{C}$

c) si A est DZ dans $\mathbb{R}$ alors $a=QDQ^{-1}$ avec $Q=0$ donc $A=0$, absurde

d) A est réelle donc $m_{3i}(A)=m_{-3i}(A)$ donc $m_0(A)=n-2m_{3i}(A)$ est impair, donc non nul et $\det(A)=0$.

e) A est sym réelle donc DZ ; $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$ (car réel et non vide) donc $A=P0P^T=0$ (récip évidente)

2. On pose $f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos(x) & \text{si } x\in[0,n]\\ 0 & \text{si } x>n\end{cases}$ et on applique le TCD : si n est grand, $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-x}\cos(x)$ et $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}|\cos(x)|\leqslant e^{-x}$ par concavité de ln. On en déduit $\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-i}\right)=\dfrac{1}{2}$

Exercice 52 *[sujet]* **1.** a) $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-3\end{pmatrix}$

b) i. $(A-2I_2)(A-6I_2)=0$ donc $Q=(X^2+X-2)(X^2+X-6)=(X-1)(X+2)(X-2)(X+3)$ annule M

ii. Q est SARS donc M est DZ ; si $M=R\Delta R^{-1}$ alors $M^2+M=R(\Delta^2+\Delta)R^{-1}$ donc si $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ on a $\begin{cases}\lambda_1^2+\lambda_1=2\\ \lambda_2^2+\lambda_2\end{cases}=6\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1\in\{1,-2\}\\ \lambda_2\in\{2,-3\}\end{cases}$ (ou l'inverse). On a donc 4 cas : si $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{1,2\}$ alors $\mathcal{X}_M=(X-1)(X-2)=X^2-3X+2$ puis (C-Ham) $M^2=3M-2I_2$ donc $A=M^2+M=4M-2I_2$ et $M=\dfrac{1}{4}(A+2I_2)$ et on vérifie que M est bien solution. Si $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{1,-3\}$, on trouve $M=3I_2-A$; si $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{-2,2\}$, on trouve $M=A-4I_2$; et si $\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{-2,-3\}$, on trouve $M=-\dfrac{1}{4}(A+6I_2)$ donc au total 4 solutions

2. si $x>0$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, si $x<0$ DVG et $f_n(0)=\dfrac{1}{1+(-1)^nn}=\dfrac{(-1)^n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $D_f=\mathbb{R}^+$.

On commence par la continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$ par CVNTS avec $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{e^{-na}}{n-1}=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$. Puis la continuité en 0 : $f(x)-f(0)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}-1}{1+(-1)^n n}$ et $\left|\frac{e^{-nx}-1}{1+(-1)^n n}\right|=\frac{1-e^{-nx}}{n+(-1)^n}\leqslant\frac{1-e^{-n}}{n+(-1)^n}$ si $x\in[0,1]$ donc CVN sur $[0,1]$ (donc continue en 0)

Exercice 53 *[sujet]* **1.** a) Fait en cours : $D_\Gamma=\mathbb{R}^{+*}$

b) cours

c) pour $x>0$ fixé et $t>0$, on a $|e^{-t}|<1$ donc $\frac{t^x e^{-t}}{1-e^{-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^x e^{-(n+1)t}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty}|t^x e^{-(n+1)t}|\,\mathrm{d}t \overset{u=(n+1)t}{=} \frac{\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}}$ et $x+1>1$ donc $\sum\frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ CV

2. a) Fait pls fois : prendre a tel que $f^2(a)\neq 0$

b) $M'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

c) $M=PM'P^{-1}$ donc $M+I_3=P(M'+I_3)P^{-1}$ et $\det(M+I_3)=\det(M'+I_3)\overset{\text{triang}}{=}1$

d) si A est inversible alors $A+M=A(I_3+N)$ avec $N=A^{-1}M$ qui vérifie $N^3\overset{AM=MA}{=}A^{-3}M^3=0$ et $N^2\overset{AM=MA}{=}A^{-2}M^2\neq 0$ car A^{-2} est inversible et $M^2\neq 0$. D'après la question précédente, on a $\det(I_3+N)=1$ donc $\det(A+M)=\det(A)\times\det(I_3+N)=\det(A)$. Si A n'est pas inversible alors $\det(A)=0$ et $(A+M)^3\overset{AM=MA}{=}A(A^2+3AM+3M^2)$ donc $\det(A+M)^3=0=(\det(A+M))^3$ donc $\det(A+M)=0=\det(A)$

Exercice 54 *[sujet]* **1.** a) $y(x)=\alpha e^{-1/x}+e^{-1/x}F(x)$ par variation de la constante

b) $x\mapsto x-1$

c) Les solutions sont aussi de la forme $y(x)=\beta e^{-1/x}+x-1$ donc la solution telle que $y(1)=0$ est $y(x)=e^{-1/x}F(x)=x-1$ donc $F(x)=e^{1/x}(x-1)$

2. a) Si $\|e_i\|=\|e_j\|$ alors $e_i+e_j\perp e_i-e_j$ donc $f(e_i)+f(e_j)\perp f(e_i)-f(e_j)$ ce qui donne $\|f(e_i)\|^2-\|f(e_j)\|^2=(f(e_i)+f(e_j)|f(e_i)-f(e_j))=0$

b) On écrit $x=\sum x_i e_i$ avec (e_i) bon et on a $f(x)=\sum x_i u(e_i)$ et par Pythagore, $\|f(x)\|^2=\sum x_i^2\|f(e_i)\|^2=k^2\|x\|^2$ $k=\|f(e_i)\|\geqslant 0$