Oral TD2 : réduction des endomorphismes

Exercice 1 (CCINP PSI 2023)
Soit A symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$

1. Justifier que A est diagonalisable
2. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 + 4X^2 + 5X$
3. Trouver A

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geqslant 1$

1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable
2. Montrer que la réciproque est fausse
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$
4. Montrer que la réciproque de a) est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ canoniquement associée à f. On suppose $f = g^2$.

1. Déterminer les éléments propres de A ; est-elle diagonalisable ?
2. soient e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés à 1 et 3 ; montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f, associés à 1 et 3.
3. En déduire que e_1 et e_3 sont aussi des vecteurs propres de g ; quelles sont les valeurs propres associées ?
4. g est-il diagonalisable ?
5. Quelles sont les valeurs propres possibles de g ?

Exercice 4 (Centrale PSI 2023)
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, u et v deux symétries telles que $u \circ v = -v \circ u$

1. Montrer que n est pair
2. On pose $F^+ = \ker(u + id)$ et $F^- = \ker(u - id)$. Montrer que $v(F^+) = F^-$, $v(F^-) = F^+$ et $E = F^+ \oplus F^-$
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ où $n = 2p$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.
2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$ *(*)*. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?
3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.
4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?
5. Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi. *(*)*
6. Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible. *(*)*

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2024)
Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer l'équivalence entre les deux propositions

i) A est nilpotente
ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$ *(*)*

Indications

Exercice 5

2. *Faire des manipulations par blocs, en supposant $\lambda \neq 0$ si besoin.*
5. *Calculer B^2.*
6. *Utiliser B^2 et l'exercice 2.*

Exercice 6

Calculer ces traces en utilisant les valeurs propres de A